
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

THE DIRICHLET PROBLEM FOR A CERTAIN PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATION

H. F. Gebreslasie

Belgorod State National Research University

Annotation. The study investigates the solvability of an elliptic pseudo-differential equation model in a multidimensional domain with a cut containing an arbitrary function determined. One writes out a general solution in the Sobolev Slobodetskii space for the equation in a domain with cut wedge using a special factorization for elliptic symbols; Using Dirichlet condition a certain integral equation is obtained, and its unique solvability is equal to the solvability of the Dirichlet problem in a multidimensional domain when the angle of the wedge tends to zero.

Keywords: pseudo-differential equations; Dirichlet condition; Fourier image; Space with cut.

Introduction

The model equations in canonical non-smooth domains, such as cones, play a significant role in the theory of pseudo-differential equations in non-smooth domains. Pseudo-differential equations are widely utilized in mathematics and physics, particularly in electromagnetic wave scattering problems, where the factorization method is commonly employed.

In [1–3], elliptic pseudo-differential equations were considered in model domains with a non-smooth boundary of various dimensions. The study was based on a special wave factorization of the elliptic symbol with index α , the presence of which made it possible to describe the solvability picture of the model pseudo-differential equation.

1. Notations and Definitions

A pseudo differential operator A with symbol $A(\xi)$ in domain $D \subset \mathbb{R}^m$ is defined by:

$$(Au)(x) = \int_D \int_{\mathbb{R}^m} A(\xi) u(y) e^{i(y-x) \cdot \xi} dy d\xi, \quad x \in D,$$

where the symbol $A(\xi)$ satisfies the condition

$$c_1 < |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| < c_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad c_1, c_2 > 0,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ is an order of the operator A .

We consider such an operator in the Sobolev Slobodetskii space $H^s(\mathbb{R}^m)$ with the norm

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi,$$

where $\tilde{u}$ is Fourier image of u .

In this article, we consider solvability of the following pseudo-differential equation in Sobolev Slobodetskii space

$$(Au)(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{W}_+^a, \quad (1)$$

where $W_+^a = C_+^a \times \mathbb{R}^{m-2}$, $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (x_1, x_2), x_2 > a \mid x_1 \mid, a > 0\}$, f is an arbitrary function in $H_0^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m \setminus \bar{W}_+^a)$ and $A(\xi)$ admits the wave factorization with respect to the wedge W_-^a having index α , such that $\frac{1}{2} < \alpha - s < \frac{3}{2}$ has a general solution $u(x)$ in its Fourier transform $\tilde{u}(x)$ given in [3], in Sobolev Slobodetskii space $H^s(\mathbb{R}^m \setminus W_+^a)$ of the form

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) = & A_{\#}^{-1}(\xi) \left(B(\xi) (I - G'_{m-2})(\xi) B^{-1}(\xi) (A_{\#}^{-1} \tilde{f})(\xi) + \frac{\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2, \xi') + \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2, \xi')}{2} \right) \\ & + A_{\#}^{-1}(\xi) \left(v.p. \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta, \xi')}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} d\eta - v.p. \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta, \xi')}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta} d\eta \right), \end{aligned} \quad (2)$$

where I is unitary operator, G'_{m-2} is integral operator [1, 3], $\tilde{f}$ continuation of f onto $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$, $B(\xi)$ is an arbitrary polynomial in ξ_1, ξ_2 satisfying the condition for $A(\xi)$ and c_o is an arbitrary function in $H^{s-\alpha e - \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{m-1})$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi' \in \mathbb{R}^{m-2}$ with Dirichlet boundary condition

$$u|_{x_1 - ax_2 = 0} = f_1(ax_1 + x_2, x'), \quad u|_{x_1 + ax_2 = 0} = f_2(ax_1 - x_2, x'), \quad (3)$$

where $x' = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, f_1, f_2 are functions in the space $H^{\frac{1}{s-2}}(\mathbb{R}^{m-1})$.

2. On a general solution

Letting $A_{\#}^{-1} B(\xi) G'_{m-2}(\xi) B^{-1}(\xi) A_{\#}^{-1}(\xi) \tilde{f} = F(\xi)$, applying change of variables

$$y_1 = \xi_1 + a\xi_2, \quad y_2 = \xi_1 - a\xi_2 \quad \text{subsequently,} \quad \xi_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \xi_2 = \frac{y_1 - y_2}{2a}$$

and letting S be a one-dimensional singular integral operator defined by:

$$(Sv)(y, \xi') = v.p. \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta, \xi')}{y - \eta} d\eta.$$

We can rewrite the formula for the solution as

$$\tilde{u} \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2a}, \xi' \right) = \tilde{f}(y_1, y_2, \xi') + a_{\#}^{-1}(y_1, y_2, \xi') (P\tilde{c}_0(y_1, \xi') + O\tilde{c}_0(y_2, \xi')),$$

where $\tilde{f}(y_1, y_2, \xi') = F \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2a}, \xi' \right)$, $a_{\#}(y_1, y_2, \xi') = A_{\#} \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2a}, \xi' \right)$ and

$$P = \frac{1}{2}(I + S), \quad Q = \frac{1}{2}(I - S) \quad \text{for a unitary operator } I.$$

Again denote, $P\tilde{c}_0 = \tilde{C}_0$, $Q\tilde{c}_0 = \tilde{D}_0$, $\tilde{u} \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2a}, \xi' \right) = \tilde{U}(y_1, y_2, \xi')$ then we obtain:

$$\tilde{U}(y_1, y_2, \xi') = \tilde{f}(y_1, y_2, \xi') + a_{\#}^{-1}(y_1, y_2, \xi') \tilde{C}_0(y_1, \xi') + a_{\#}^{-1}(y_1, y_2, \xi') \tilde{D}_0(y_2, \xi').$$

Taking into account conditions (3) and their Fourier image, let us first integrate this last equation over y_1 , then y_2 one at a time, obtaining the following system of linear integral equations:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^*(y_1, y_2, \xi') dy_1 + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(y_1, y_2, \xi') (\tilde{C}_0(y_1, \xi')) dy_1 + \tilde{D}_0(y_2, \xi') &= \tilde{F}_1(y_2, \xi') \\ \tilde{C}_0(y_1, \xi') + \int_{-\infty}^{\infty} K_2^*(y_1, y_2, \xi') dy_2 + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(y_1, y_2, \xi') \tilde{D}_0(y_2, \xi') dy_2 &= \tilde{F}_2(y_1, \xi'), \end{aligned} \quad (4)$$

where $\int_{-\infty}^{\infty} a_{\#}^{-1}(y_1, y_2, \xi') dy_1 \equiv \tilde{a}_0(y_2, \xi')$, $\int_{-\infty}^{\infty} a_{\#}^{-1}(y_1, y_2, \xi') dy_2 \equiv \tilde{b}_0(y_1, \xi')$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(y_2, \xi') &= \tilde{f}_1(y_2, \xi') \tilde{a}_0^{-1}(y_2, \xi'), \quad \tilde{F}_2(y_1, \xi') = \tilde{f}_2(y_1, \xi') \tilde{b}_0^{-1}(y_1, \xi'), \\ K_1^*(y_1, y_2, \xi') &= \tilde{a}_0^{-1}(y_2, \xi') \tilde{f}(y_1, y_2, \xi'), \quad K_2^*(y_1, y_2, \xi') = \tilde{b}_0^{-1}(y_1, \xi') \tilde{f}(y_1, y_2, \xi'), \\ K_1(y_1, y_2, \xi') &= a_{\#}^{-1}(y_1, y_2, \xi') \tilde{a}_0^{-1}(y_2, \xi'), \quad K_2(y_1, y_2, \xi') = a_{\#}^{-1}(y_1, y_2, \xi') \tilde{b}_0^{-1}(y_1, \xi'), \end{aligned}$$

provided that, $\tilde{a}_0(y_2, \xi') \neq 0$, $\tilde{b}_0(y_1, \xi') \neq 0$.

3. Case $a \rightarrow \infty$

Let's start with the functions $\tilde{a}_0, \tilde{b}_0$.

$$\begin{aligned}\tilde{a}_0(y_2, \xi') &= \int_{-\infty}^{\infty} a_{\#}^{-1}(y_1, y_2, \xi') dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\#}^{-1}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2a}, \xi'\right) dy_1 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(y_1, y_2, \xi') dy_1, \\ &\equiv \tilde{A}_0(y_2, \xi'), \quad a \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Here, we assume that the function $\lambda(y_1, y_2, \xi')$ is symmetric with respect to y_1, y_2 and it depends on $y_1 + y_2$. Similarly

$$\tilde{b}_0(y_2, \xi') \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(y_1, y_2, \xi') dy_2 \equiv \tilde{B}_0(y_1, \xi'), \quad a \rightarrow \infty,$$

We observe, $\tilde{A}_0(y_2, \xi') \equiv \tilde{B}_0(y_1, \xi')$.

Now consider the behavior of K_1, K_2, K_1^*, K_2^* as follow

$$\begin{aligned}K_1(y_1, y_2, \xi') &= a_{\#}^{-1}(y_1, y_2, \xi') \tilde{a}_0^{-1}(y_2, \xi') \rightarrow \lambda(y_1, y_2, \xi') \tilde{A}_0^{-1}(y_2, \xi'), \quad a \rightarrow \infty \\ K_2(y_1, y_2, \xi') &= a_{\#}^{-1}(y_1, y_2, \xi') \tilde{b}_0^{-1}(y_1, \xi') \rightarrow \lambda(y_1, y_2, \xi') \tilde{B}_0^{-1}(y_1, \xi'), \quad a \rightarrow \infty\end{aligned}$$

as $a \rightarrow \infty$ it follows that kernels K_1, K_2 tend to the same symmetric kernel, which we denote $K(y_1, y_2, \xi')$, similarly for K_1^*, K_2^* , we denote by $K^*(y_1, y_2, \xi')$.

Finally, the last limit is related to the boundary function, namely

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1(y_2, \xi') &= \tilde{g}_1(y_2, \xi') \tilde{a}_0^{-1}(y_2, \xi') \rightarrow \tilde{f}_1(y_2, \xi') \tilde{A}_0^{-1}(y_2, \xi') = \tilde{\alpha}(y_2, \xi'), \quad a \rightarrow \infty \\ \tilde{F}_2(y_1, \xi') &= \tilde{g}_2(y_1, \xi') \tilde{b}_0^{-1}(y_1, \xi') \rightarrow \tilde{f}_2(y_1, \xi') \tilde{B}_0^{-1}(y_1, \xi') = \tilde{\beta}(y_1, \xi'), \quad a \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Then using the symmetry of kernel, the system (4) as $a \rightarrow \infty$ takes the following form

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} K^*(y_1, y_2, \xi') dy_1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(y_1, y_2, \xi') \tilde{C}_0(y_1, \xi') dy_1 + \tilde{D}_0(y_2, \xi') &= \tilde{\alpha}(y_2, \xi') \\ \tilde{C}_0(y_1, \xi') + \int_{-\infty}^{\infty} K^*(y_1, y_2, \xi') dy_2 + \int_{-\infty}^{\infty} K(y_1, y_2, \xi') \tilde{D}_0(y_2, \xi') dy_2 &= \tilde{\beta}(y_1, \xi'),\end{aligned} \tag{5}$$

Exchanging the role of the variables y_1, y_2 in the second equation,

$$\tilde{C}_0(y_2, \xi') + \int_{-\infty}^{\infty} K^*(y_1, y_2, \xi') dy_1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(y_1, y_2, \xi') \tilde{D}_0(y_1, \xi') dy_1 = \tilde{\beta}(y_2, \xi')$$

and adding to the first equation we get one equation

$$\begin{aligned}\tilde{C}_0(y_2, \xi') + \tilde{D}_0(y_2, \xi') + 2 \int_{-\infty}^{\infty} K^*(y_1, y_2, \xi') dy_1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(y_1, y_2, \xi') (\tilde{C}_0(y_1, \xi') + \tilde{D}_0(y_1, \xi')) dy_1 \\ = \tilde{\alpha}(y_2, \xi') + \tilde{\beta}(y_2, \xi')\end{aligned}$$

But $\tilde{C}_0(y_2, \xi') + \tilde{D}_0(y_2, \xi') = \tilde{c}_0(y_2, \xi')$ as $P + Q = I$ then finally equation can be written as:

$$\tilde{c}_0(y, \xi') + 2 \int_{-\infty}^{\infty} K^*(\tau, y, \xi') d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau, y, \xi') \tilde{c}_0(\tau, \xi') dy_1 = \tilde{\psi}(y, \xi'), \tag{7}$$

where $\tilde{\psi}(y, \xi') = \tilde{\alpha}(y, \xi') + \tilde{\beta}(y, \xi')$, $K(\tau, y, \xi') = \frac{\lambda(\tau, y, \xi')}{\tilde{A}_0(y, \xi')}$, $K^*(\tau, y, \xi') = \frac{F(\frac{\tau + y}{2}, 0, \xi')}{\tilde{A}_0(y, \xi')}$.

Theorem 1. Suppose that $A(\xi)$ admit wave factorization with respect to W_-^a with index ϖ , such that $\frac{1}{2} < \varpi - s < \frac{3}{2}$, for all sufficiently large values of a with Dirichlet boundary conditions (3), Then the in-

tegral equation (7) is equivalent to boundary problem of (1),(2) with an arbitrary function $\tilde{c}_0(x) \in H^{s-ae-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{m-1})$.

4. Dirichlet boundary problem on $\mathbb{R}^m$ with a cut

Here, we consider the Dirichlet problem on $\mathbb{R}^m \setminus E_0$,

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_m), x_1 = 0, x_2 > 0\}$$

We formulate it as follows

$$(Au)(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus E_0, \quad u|_{E_0} = \mu(x_2, \xi'), \quad (8)$$

where the function $\mu \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+^{m-1})$ is the trace of the same $\gamma \in H^s(W_+^a)$ defined in the wedge W_+^a with sufficiently the large a . Now examining the solvability of equation,

$$(Au)(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{W}_+^a$$

with the boundary condition,

$$u|_{ax_1-x_2=0} = \gamma(ax_1 + x_2, x'), \quad u|_{ax_1+x_2=0} = \gamma(ax_1 - x_2, x'), \quad x' \in \mathbb{R}^{m-1}. \quad (9)$$

We come to conclusion that instead of the equation (7) we get the equation

$$\tilde{c}_0(y, \xi') + 2 \int_{-\infty}^{\infty} K^*(t, y, \xi') d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} K(t, y, \xi') \tilde{c}_0(t, \xi') dt = \frac{2\tilde{\mu}(y, \xi')}{\tilde{A}_0(y, \xi')}, \quad (10)$$

where $K(t, y, \xi')$, $K^*(t, y, \xi')$ and $A(y, \xi')$ are as defined above.

Theorem 2. Suppose that the symbol $A(\xi)$ admit wave factorization with respect to W_-^a with index a , such that $a - s = 1 + \delta$, $|\delta| < \frac{1}{2}$ for all sufficiently large values of the parameter a with differentiable factors, $\tilde{\mu} \in H^{s-\frac{1}{2}}(E_0)$, then the unique solvability of problem (8) is equivalent to the unique solubility of the integral equation (10) in the space $H^{s-ae-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{m-1})$.

Conclusion

In this study, multidimensional cases are considered, in which the Dirichlet problem on a multi-dimensional with a cut for a non-homogeneous elliptic pseudodifferential equation is reduced to an integral equation. The unique solvability equal to the solvability of the Dirichlet problem when the angle of the wedge tends to zero is obtained.

Acknowledgments

I would like to thank my scientific advisor, Dr. Vasilyev Vladimir Borisovich, for his invaluable guidance and support throughout my research.

References

1. Vasilyev V. B. Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case / V. B. Vasilyev. // Opusc. Math. – 2019. – Vol. 39, No 1. – P. 109–124.
2. Agarkova N. N. On the Dirichlet Problem in a plane domain with a cut, / N. N. Agarkova, V. B. Vasilyev, H. F. Gebreslasie. // Appl. Math. & Phys. – 2023. – Vol. 55, No 3. – P. 258–264. (in Russian)
3. Vasil'ev V. B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains / V. B. Vasil'ev. – Dordrecht Boston London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

MODELING LANGUAGE COMPETITION TAKING INTO ACCOUNT THE VARIABILITY OF LANGUAGE PRESTIGE

A. V. Medvedev, O. A. Kuzenkov

Nizhny Novgorod State University named after N. I. Lobachevsky

Annotation. The aim of this research is to identify a language prestige function based on statistical data and to predict language dynamics. **Methods:** A mathematical model of a bilingual community is constructed, taking into account language acquisition by children at an early age, varying prestige levels of languages for their speakers, and the lexical similarity effect of competing languages. The model is examined using classical methods of qualitative dynamic systems theory over an extended time horizon. The study investigates how language parameters change over time. For this purpose, a non-autonomous model is applied to empirical data across various time periods. Prestige functions for the two most common languages in Ukraine — Ukrainian and Russian — are identified, and predictions are made regarding language dynamics. **Results:** A logistic function describing the time-dependent prestige of languages is determined. Real statistical data for the Ukrainian-Russian language pair are utilized to model language dynamics, providing insights into the rapid shifts in the number of speakers. A forecast of future language dynamics is developed. **Conclusion:** The time-dependent relationship of language prestige is identified, and a forecast for changes in the number of speakers of the languages under study is provided.

Keywords: language extinction, lexical similarity, language volatility, bilingualism, language competition, language dynamics, language preservation, mathematical model, ordinary differential equations.

Introduction

Methods from nonlinear dynamics theory are applied across numerous scientific fields, including the study of language usage dynamics within societies [1–7]. Current data on the quantitative characteristics of shifts in language speakers within a society enable accurate description and prediction of language dynamics. Among the pioneers in mathematical modeling of language dynamics were Abrams and Strogatz [1]. Their model assumes that each member of a given community, regardless of their multilingual proficiency, favors only one of two languages at any given time. It also posits that children learn and use the language preferred by their parents, meaning generational shifts do not alter the relative proportions of language speakers within the population. Abrams and Strogatz introduced the concepts of language prestige and language volatility, the latter describing speakers' readiness to switch languages. The community size was assumed constant in this model. The Abrams-Strogatz (AS) model demonstrated that, under these assumptions, one language will invariably displace the other over time. In 2005, Mira and Paredes introduced a new model [2], adding the concept of language similarity (lexical similarity). This model showed that if languages are highly similar, they may coexist for extended periods. In 2006, Castelló developed a new model [3], introducing a bilingual group and demonstrating the conditions under which two languages could stably coexist within a community. The Baggs and Freedman model [4, 5], examining interactions between monolingual and bilingual populations, showed dynamics where language groups could either coexist or displace one another. Wybourne and Hayward further illustrated the importance of a stable bilingual group for the coexistence of two languages [6]. Díaz and Shvydky introduced the concept of language status [7]. In another study [8], it was shown that language parameters depend on time and may vary significantly with social conditions. Research [9] has demonstrated that language acquisition by children in early

bilingual environments occurs sequentially, an effect shown to influence language competition modeling [10–13]. Study [14] highlighted the effect of mutual support within single-language groups, which directly impacts the appeal of learning a second language.

The inclusion of these new factors has enabled models to depict scenarios in which stable bilingualism persists, or alternatively, where only one of the two languages survives. In this study, we integrate known effects into a new model to analyze how certain factors change over time.

The aim of this study is to develop and analyze a new model of a bilingual community, accounting for: early childhood language acquisition by children of bilingual parents, differential prestige of the second language among adults, varying language volatility, and the effect of lexical similarity between the languages. The study further seeks to define language prestige as a time-dependent function and to forecast changes in the number of language speakers moving forward.

1. Methodology

1.1. Model of a Bilingual Community

To model language competition, we adopt the following assumptions:

- Members of the community can speak one of two languages, referred to as “first” and “second,” or both. We define: z_1 — the proportion of community members who speak only the first language, z_2 — the proportion of community members who speak only the second language, z_{12} — the proportion of community members who are bilingual and speak both languages.

- The proportion of individuals who do not speak either language is negligible.
- Each language group size is non-negative $0 \leq z_1, z_2, z_{12} \leq 1$;
- The total community size remains constant over time, as the birth rate equals the death rate $z_1 + z_2 + z_{12} = 1$;

- The coefficient r characterizes both birth and death rates.
- The likelihood that a child will spontaneously acquire both languages simultaneously is negligible.
- Children of bilingual parents initially acquire either the first or second language with probabilities c_1 and c_2 respectively, where $c_1 + c_2 = 1$ [10, 12];

- Language prestige is defined by coefficients c_1 and c_2 for the first and second languages, respectively [1].

- Language prestige evolves over time according to a logistic function: $c_1(t) = p_1 \frac{e^{(t-p_3)p_4}}{e^{(t-p_3)p_4} + 1} + p_2$, where changes in prestige are influenced by shifts in the social environment [8].

- Parameters α and β define language volatility as per the Abrams and Strogatz hypotheses [1].
- When speakers of different languages meet (with an interaction frequency directly proportional to the product of their respective proportions), a language shift can occur with coefficients b_1 and b_2 for the first and second languages, respectively.

- Monolingual community members can be taught the second language by bilinguals [3].
- Russian and Ukrainian share a lexical similarity estimated between 62 % and 86 % [21–22], so the lexical similarity parameter for our model is chosen as the average $k = 0.74$ [2].

The parameter k is assumed to be relatively constant over time, undergoing significant changes only over periods far exceeding the timeframe of the empirical data used in this study. The language volatility parameters α and β , along with the coefficients b_1 and b_2 , are also relatively stable. Thus, we treat these parameters as constants and disregard any minor variations over time. The dynamics of language speakers in the community are characterized by the following system of equations:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = (1-k)c_1(\tau)rz_{12} - b_1z_1(z_2 + z_{12})^\alpha; \\ \frac{dz_2}{dt} = (1-k)(1-c_1(\tau))rz_{12} - b_2z_2(z_1 + z_{12})^\beta; \\ \frac{dz_{12}}{dt} = b_1z_1(z_2 + z_{12})^\alpha + b_2z_2(z_1 + z_{12})^\beta; \\ \frac{d\tau}{dt} = T. \end{cases} \quad (1)$$

The initial values for the language group proportions must be non-negative, as these values represent real population proportions. System (1) satisfies the conditions of quasi-positivity [16], and the sum of all equations in the system is identically zero $\frac{dz_1}{dt} + \frac{dz_2}{dt} + \frac{dz_{12}}{dt} = 0$. This implies that the identity $z_1 + z_2 + z_{12} = 1$ will stay the same at all subsequent time points.

Based on statistical data analysis in [1], approximate values for the parameters were determined: $\alpha, \beta = 1.31 \pm 0.25$. Accordingly, this study considers realistic parameter ranges of $\alpha, \beta = 1.5 \pm 0.5$.

2. Results

2.1. Model Analysis

In this study, it is assumed that over short time intervals, language prestige changes minimally, allowing us to neglect these fluctuations. Therefore, to determine the parameters of the prestige function, we examine the dynamic behavior of model (1) across brief periods, during which prestige can be treated as constant. The phase space of system (1), assuming prestige remains unchanged, is a three-dimensional standard simplex [16]. By substituting $z_{12} = 1 - z_1 - z_2$, system (1) can be reduced to a two-dimensional system:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = (1-k)c_1r(1-z_1-z_2) - b_1z_1(1-z_1)^\alpha; \\ \frac{dz_2}{dt} = (1-k)(1-c_1)r(1-z_1-z_2) - b_2z_2(1-z_2)^\beta. \end{cases} \quad (2)$$

For model (2), c_1 is considered constant, the condition of quasi-positivity holds, and the inequality $z_1 + z_2 \leq 1$ is valid. This model was analyzed using standard qualitative methods. The phase portraits of system (2) for various language parameters are shown in Figure 1. Equilibrium states are marked with red points. Horizontal and vertical isoclines are represented by blue and green curves, respectively. The number of intersections between isoclines indicates the quantity and nature of equilibrium points, as well as potential bifurcations. Equilibrium states #1 and #2 are always stable nodes, positioned on the boundary of the phase space at points (0, 1) and (1, 0) as shown in Fig. 1.

These findings illustrate that the dynamic behavior of the model can exhibit stable states, where either language dominates, depending on initial conditions and parameter values. The stability of these equilibrium states was determined using the Lyapunov method by calculating eigenvalues. The remaining equilibrium states are located within the region defined by the $z_1 + z_2 \leq 1$, $0 \leq z_{1,2} \leq 1$. Their coordinates were determined by finding the intersection points of the vertical and horizontal isoclines. This problem was solved using the WolframAlpha software. The calculations showed that system (2) can have between 2 and 5 equilibrium states.

The nature of the equilibrium states was identified by numerically constructing the phase portrait: states #3 and #4 are unstable saddle points, states #1, #2, and #5 are stable nodes (as shown in Fig. 1). A qualitative analysis of system (2) reveals two possible dynamic outcomes:

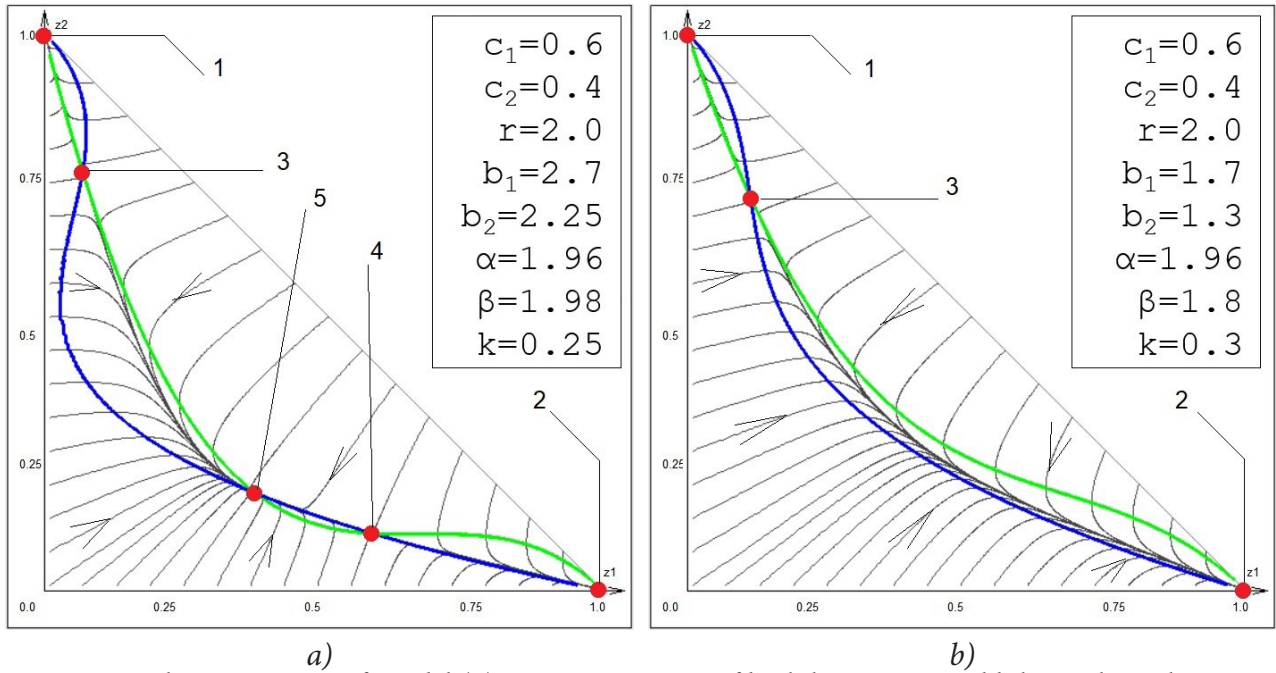


Fig. 1. Phase Portraits of Model (2): a — coexistence of both languages and bilingual speakers; b — replacement of one language by the other

1. Survival of only one language.
2. Coexistence of two languages along with a bilingual population.

Bifurcations are possible within this model (Fig. 2). Specifically: state #1 (saddle) merges with state #2 (stable node). This merging results in a saddle-node bifurcation, producing a new equilibrium state #3, which is of the “saddle-node” type. At this bifurcation point, the vertical and horizontal isoclines intersect tangentially. This situation is considered non-robust, and when the parameter β crosses the bifurcation threshold, equilibrium state #3 will disappear. Without stable states within the re-

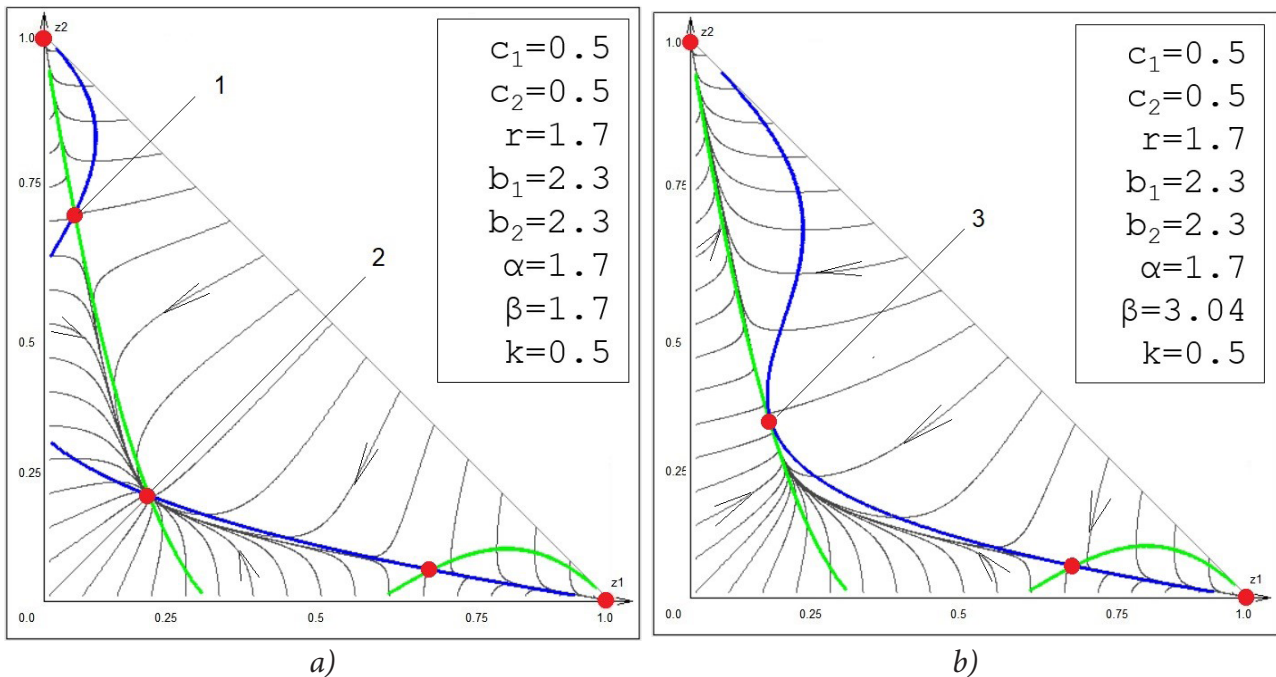


Fig. 2. Phase Portraits of Model (2): a — before bifurcation; b — at the point of saddle-node bifurcation

gion $z_1 + z_2 \leq 1$, $0 \leq z_{1,2} \leq 1$. the model predicts that coexistence of languages will be impossible, leading to dominance by a single language.

2.2. Identification of the Language Prestige Function

Statistical data on the proportions of people in Ukraine identifying themselves as Ukrainian-speaking or Russian-speaking are provided in studies [17, 18] for the years 1994–2012 and in sources [19, 20] for the years 2001–2023. Missing yearly data points were filled by averaging values over the gaps. The curves representing language usage dynamics are non-monotonic, with noticeable inflection points observed in the years 1995, 2002, 2004, 2010, 2018, and 2022. These inflection points suggest a varying prestige parameter for each language over time (see Fig. 3).

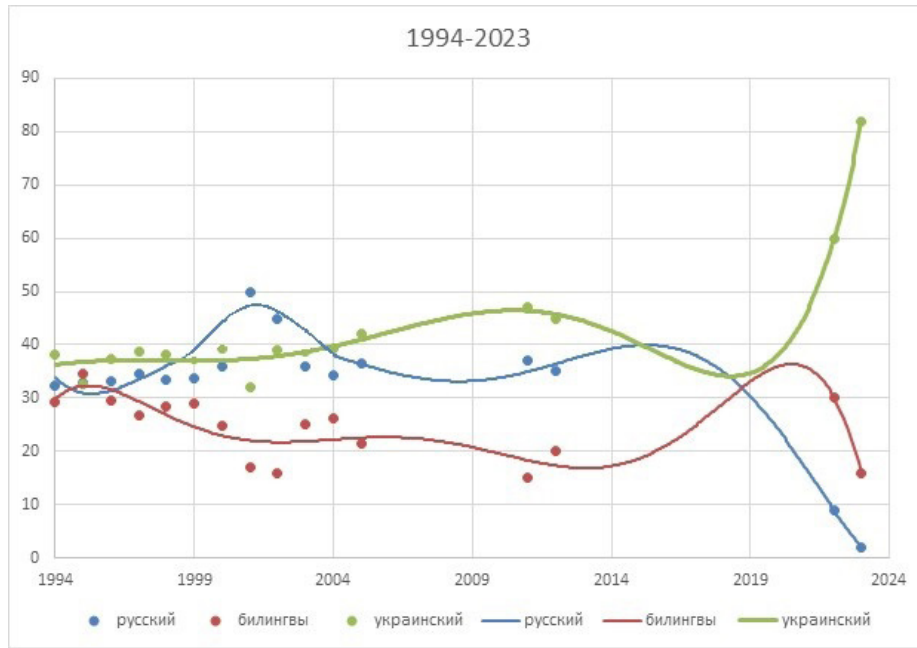


Fig. 3. Percentage of Language Speakers: points represent statistical data, while curves indicate their approximation

In 2012, the “Research & Branding Group” conducted a public opinion survey on the language issue in Ukraine [17]. The project report “Languages of Communication of Ukrainians” presented dynamic data for 2004–2012, revealing that over this 8-year period, Ukrainians shifted their stance four times on whether the Russian language should have official status. This further indicates that language prestige parameters are not constant.

Using the least squares method, the parameters for model (2) were determined. The values of these parameters are shown in Table 1.

Table 1

Coefficients of Model (2)							
$diff_old$	c_1	c_2	b_1	b_2	α	β	r
0.316	0.9	0.1	1.0	1.0	1.1	1.1	1.0

The Russian and Ukrainian languages differ in prestige with $c_1 = 0.9$, $c_2 = 0.1$ and the parameters α , β , $b_{1,2}$ were found to be equal for both languages. The modelling accuracy was relatively low, with $diff_old = 0.316$ which justifies examining the dynamics of the languages separately over shorter time intervals. Taking into account the inertia of the parameters α , β , $b_{1,2}$ and treating them as constants, the prestige parameters of the languages in model (2) were determined for shorter time intervals. Their values are presented in Table 2.

Table 2

<i>Coefficients of Model (2)</i>							
	1994–1998	1999–2002	2002–2005	2005–2012	2011–2015	2015–2022	2020–2023
c_1	0,5	0,3	0,4	0,9	0,6	0,9	0,95
c_2	0,5	0,7	0,6	0,1	0,4	0,1	0,05
$diff$	0,006	0,01	0,005	0,006	0,001	0,022	0,018

The modeling accuracy over shorter time intervals has increased. Based on the obtained values of the prestige parameter, the dependence of the prestige of the Ukrainian language on time was restored in the form of a logistic function (3). The unit of measurement for time is one year.

$$c_1(t) = 0.35 + 0.65 \frac{e^{(t-16)0.3}}{e^{(t-16)0.3} + 1}. \quad (3)$$

The graph of the values of the prestige of the Ukrainian language obtained from the simulation, as well as the graph of the function that approximates them, is shown in (Fig. 4).

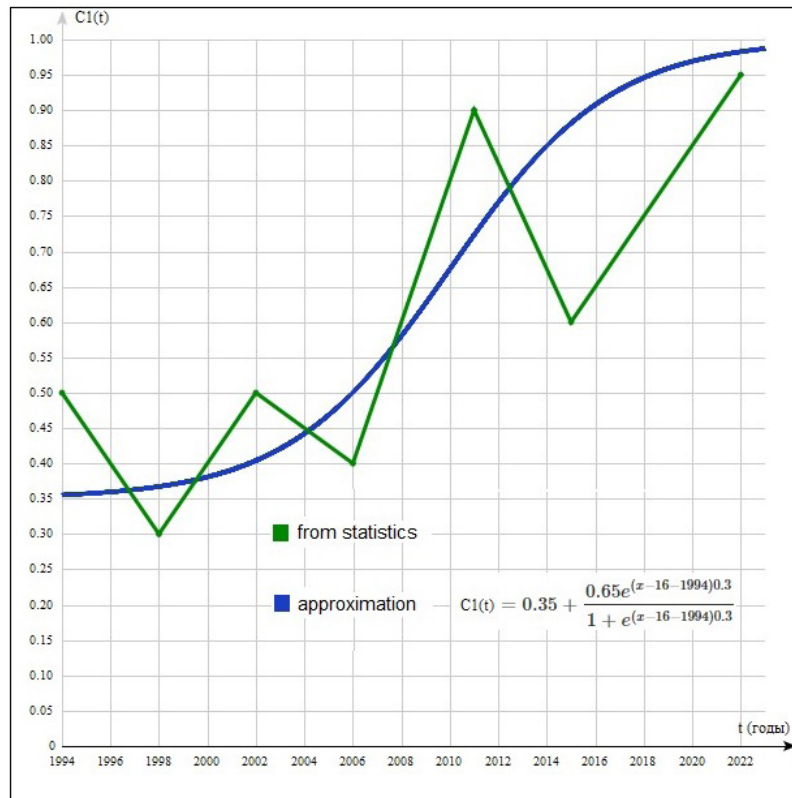


Fig. 4. Change in the prestige of the Ukrainian language over time: green — values obtained from the simulation; blue — graph of the approximating function $c_1(t)$

The obtained expression for the language prestige function (3) was added to model (1). The parameters of model (1) were determined over the entire time period of the natural data from 1994 to 2022. Their values are presented in Table 3.

Table 3

<i>Coefficients of Model (2)</i>							
$diff_new$	p_1	p_2	p_3	p_4	β	b	r
0.185	0.65	0.35	16.0	0.3	2.15	1.0	4.9

The accuracy of the results for modelling language dynamics using the new model over the full range of natural data significantly surpasses the accuracy of results from the previous models: $diff_new = 0.185$, $diff_old = 0.316$. The results of the language dynamics modelling are presented in Fig. 5. The points represent data from statistics, while the curves represent data obtained from modelling using model (1), taking into account the prestige function (3).

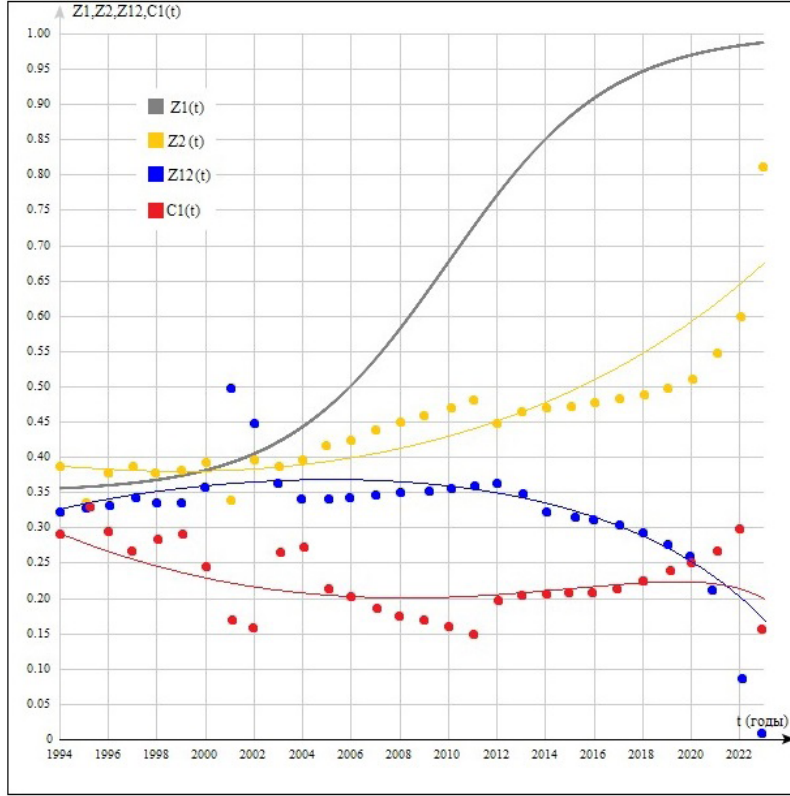


Fig. 5. Changes in the proportions of the Russian-speaking and Ukrainian-speaking groups from 1994 to 2023 in Ukraine: points represent data from statistics; lines represent data from modeling using model (1). Color identification: gray — graph of the prestige function of the Ukrainian language $c1(t)$ blue — population of the Russian-speaking group; yellow — population of the Ukrainian-speaking group; red — population of the bilingual group

Rapid changes in the populations of the Russian-speaking and Ukrainian-speaking groups prompt some considerations. In Ukraine, Surzhyk — a colloquial language incorporating elements of both Ukrainian and Russian — is prevalent. Surzhyk differs from standard Ukrainian and conversational Russian, although it lacks clear boundaries with them. It is assumed that as social tension rises between the Russian-speaking and Ukrainian-speaking segments of society, the use of Surzhyk may increase or decrease, leading individuals who speak it to identify as either Ukrainian-speaking or Russian-speaking, depending on the prevailing social sentiments.

Focusing on the lexical similarity parameter, we note that a low value of the parameter k typically results in one language being displaced, while high similarity allows for coexistence. In the case of the Ukrainian and Russian languages, the lexical similarity is considered high ($0.62 \leq k \leq 0.86$), which should promote coexistence. However, in reality, we observe the opposite situation. It is important to note that from 2015 to 2023, external factors have influenced language dynamics in Ukraine. Therefore, considering this parameter is reasonable only under ceteris paribus conditions for the languages involved. Similarly, other “inert” language parameters — α , β , $b_{1,2}$, — also significantly impact language dynamics primarily in the absence of external influences.

The values of the prestige function for the Ukrainian language show a trend towards increase. If the current situation in Ukrainian society persists, we predict the complete disappearance of the Russian language. This prediction is supported by the extremely low prestige of the Russian language ($c_2 = 0.05$) and the rapidly decreasing number of its speakers, which fell by — 37 % from 2013 to 2023. In contrast, the prestige of the Ukrainian language is high ($c_1 = 0.95$), and the number of speakers has increased by +36 % during the same period.

Discussion

The effect of language similarity is a significant finding in language dynamics, explored by D. Mira and A. Perede in their model. They examined this effect in dialects of the Spanish language (Galician, Castilian), whose dynamics are relatively monotonic and not significantly influenced by external factors. In our work, we analyzed the language pair of Russian and Ukrainian, which exists in an environment that exerts direct influence on its dynamics through social agendas. The study revealed that most parameters considered in our model lose their significance and do not affect the dynamics of the system under external pressures due to their inertness. They simply do not change in accordance with the trends occurring in the country and society. The only parameter that responds relatively quickly to changes in the environment is language prestige.

In the work by [14], it was noted that when examining language pairs of the “international-national” type, the mutual support for the “international” language approaches zero, while for the “national” language it is close to the maximum value. In contrast, the situation is reversed for language prestige — where the “international” language has a prestige value close to one, and the “national” language is close to zero. In the case of the Russian-Ukrainian language pair, one could speak of a process of reclassification of the languages, as their parameters symmetrically change over time.

In addition to the primary research, the model in this study was examined over shorter time intervals with variable parameters for the languages. The results showed a strong correlation between the parameters c_1 and α , β , $b_{1,2}$ (see Fig. 6), a relationship that was not observed when considering similar models based on relatively “monotonic” natural data. This suggests that the model parameters are dependent not only on time but also on the prestige of the languages, which leads them to lose their significance under external influences on dynamics. The model discussed in this work may be applicable for modeling the dynamics of languages whose development occurs naturally and is not externally regulated. When applying this model to languages under external control and conditional “management,” model (1) simplifies to the model described in [8] due to the predetermined nature of its parameters.

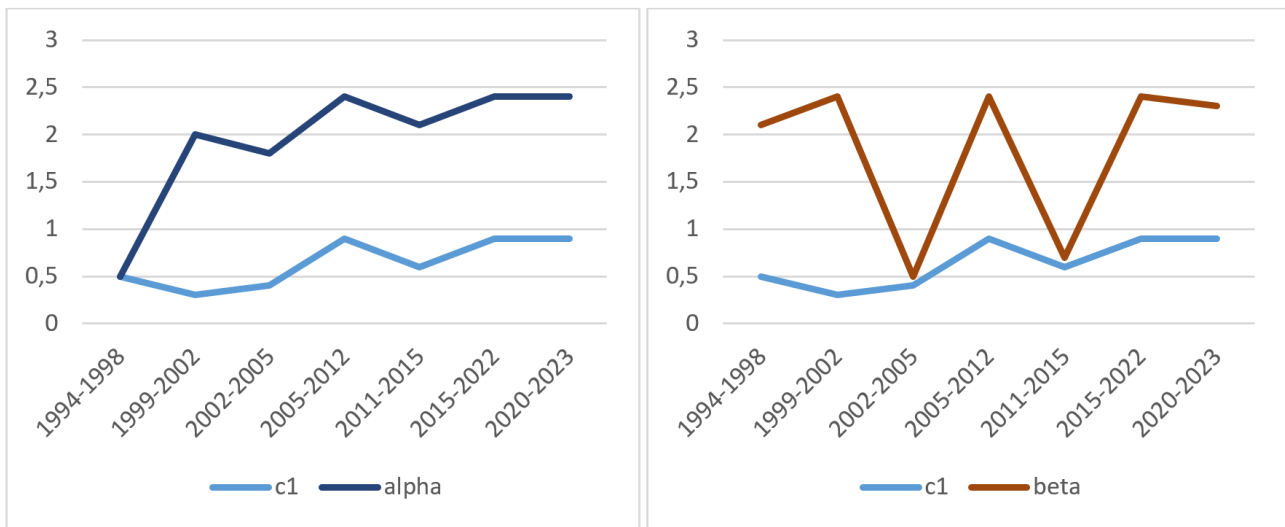


Fig. 6. Correlation of Parameter Values in Model (2)

Conclusion

This study developed and investigated a new model of language dynamics for a bilingual community that accounts for various parameters of language volatility, different coefficients of second language acquisition, and the lexical similarity of the languages in question. The effect of sequential language acquisition by children at an early age was also considered. The research examined language dynamics based on real statistical data regarding the primary languages of Ukraine: Russian and Ukrainian. A function describing the change in language prestige was derived. To achieve this, the initial model was simplified by replacing the language prestige function with parameters. The simplified model was analysed over short time intervals of natural data. For these intervals, the prestige parameter values were determined and approximated using a logistic function. The resulting language prestige function was utilized in modelling language dynamics within the new model. The modelling results demonstrated significantly higher accuracy compared to outcomes obtained from older models. It was noted that, under external influences on language dynamics, the determining factors are the parameters of language prestige. A forecast of the future development of the dynamics of these languages was constructed.

References

1. *Abrams D.* Modelling the Dynamics of Language Death / D. Abrams, S. Strogatz // *Nature*. – 2003. – 1(424). – P. 900
2. *Mira J.* Interlinguistic Similarity and Language Death Dynamics / J. Mira, B. Paredes // *EPL*. – 2005. – 1(69). – P. 1031
3. *Castelly X.* Ordering dynamics with Two non-excluding option: Bilingualism in language competition / X. Castelly, V. Eguiluz, M. San Miguel // *New Journal of Physics*. – 2006. – 1(8). – P. 308.
4. *Baggs I.* A mathematical model for the dynamics of interactions between a unilingual and a bilingual population: persistence versus extinction / I. Baggs, H. Freedman // *The Journal of Mathematical Sociology*. 1990. – 16(1). – P. 51–75.
5. *Baggs I.* Can the speakers of a dominated language survive as unilinguals?: a mathematical model of bilingualism / I. Baggs, H. Freedman // *Mathematical and Computer Modelling*. – 1993. – 18(6). – P. 9–18.
6. *Wyburn J.* The future of bilingualism: an application of the Baggs and Freedman model / J. Wyburn, J. Hayward // *The Journal of Mathematical Sociology*. – 2008. – 32(4). – P. 267–284.
7. *Diaz M.* A mathematical model of language preservation / M. Diaz, J. Switkes // *Heliyon*. – 2021. – 7(5). – P. 2405–2425.
8. *Medvedev A., Kuzenkov O.* Modeling language competition. Modern information technologies and IT education, [S. l.]. – 2023. – 19(2). – P. 2411–2473. – URL: <http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/971>. (date of request: 22.11.2023). (In Russian)
9. *Medvedev A., Kuzenkov O.* Competitiveness Function for the Generalized Abrams-Strogatti Model in the Case of Non-constant Community Size. In: Balandin D., Barkalov K., Meyerov I. (eds) // *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2023. Communications in Computer and Information Science*. – 2024. – V. 1914. Springer, Cham.
10. *Alexandrova N.* Disappearance of languages and natural bilingualism // *Multilingualism and transcultural practices*. – 2023. – 20(3). – P. 436–455. – doi:10.22363/2312-8127-2023-20-3-436-455 (In Russian)
11. *Benjamins J.* A Neurolinguistic Theory of Bilingualism / Paradis 2004 Amsterdam, Philadelphia. – 2004.
12. *Alexandrova N.* Native language, foreign language and linguistic phenomena that have no name // *Questions of linguistics*. – 2004. – 3. – P. 88–100 (In Russian)

13. *Alexandrova N.* Bilingualism as an Unstable State / N. Alexandrova, V. Antonets, O. Kuzenkov, I. Nuidel, O. Shemagina, V. Yakhno // *Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence and Neuroinformatics*; N. Alexandrova, V. Antonets, O. Kuzenkov, I. Nuidel, O. Shemagina, V. Yakhno // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. – V. 1358. Springer.
14. *Medvedev A., Kuzenkov O.* Modeling the competition of languages in a bilingual community // *Applied nonlinear Dynamics*. – 2024. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy*. (In Russian)
15. *Volterra V.* Mathematical theory of the struggle for existence // *Science*, Moscow (1976) (In Russian)
16. *Kuzenkov O., Ryabova E.* Mathematical modeling of selection processes // *Education*, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod. – 2007. – 1(2). – P. 31–113 (In Russian)
17. URL=http://www.rb.com.ua/upload/medialibrary/PR_Ry_Ukr_2012.pdf (last 04 mart 2016)
18. *Panina N.* Ukrainian society 1994–2005: sociological monitoring. – Kiev: LLC “Publishing House Sofia”, 2005. – P. 68. – URL=<http://dif.org.ua/modules/pages/files/us5.pdf> (last 29 feb 2008)
19. Regularities of the development of Ukrainian oral literary speech / O. O. Potebni // *Institute of Foreign Studies*. – Naukova Dumka-K., 1965. (In Russian)
20. State Statistics of Ukraine. – URL=<https://www.ukrstat.gov.ua>
21. *Dyachok M., Shapoval V.* Genealogical classification of languages // *Novosibirsk, C. 32*, (2002) URL=<http://www.philology.ru/linguistics1/dyachok-shapoval-02.htm> (last 25 sep 2024)
22. *Tishchenko K.* The Truth About similar Ukrainian languages / *Ukrainian week* # 39 (256) 28.09–4.10.09.2012

МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

Г. М. Абдуолимова, С. Т. Шарипова, Р. Г. Обидинова, Г. Ж. Долимова

Андижанский государственный университет

Аннотация. В настоящей статье исследуются конфликтно-игровые задачи, описываемые системой линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при интегральных ограничениях на управления игроков при наличии запаздывания, с точки зрения возможности завершения преследования за конечное время.

Ключевые слова: линейная дифференциальная игра, постоянные матрицы, управление преследователя, управление убегающего, Лебегу функциями, вектор-функция, терминальное множество.

Постановка задачи. В пространстве R^n рассматривается линейная дифференциальная игра преследования [2, 3, 6]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) + Cu(t) - Dg(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $z(t) \in R^n$, $n \geq 1$; A, B, C, D — постоянные матрицы, размерности которых $(n \times n)$, $(n \times n)$, $(n \times p)$, $(n \times q)$, соответственно; h — фиксированное положительное число, т. е. величина запаздывания; $u(t) \in R^p$ — управление преследователя; $g(t) \in R^q$ — управление убегающего, соответственно. Управления преследующего и убегающего игрока $u(\cdot), g(\cdot)$ являются измеримыми по Лебегу функциями, которые удовлетворяют интегральным ограничениям вида

$$\int_0^\infty |u(t)|^2 dt \leq 1, \quad (2)$$

$$\int_0^\infty |g(t)|^2 dt \leq 1. \quad (3)$$

Измеримые функции $u = u(t)$, $g = g(t)$, $0 \leq t < \infty$, удовлетворяющие интегральным ограничениям (2), (3) назовем допустимыми управлениями преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Начальным положением для преследования (1) является n — мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h, 0]$. Отрезок $-h \leq t \leq 0$, на котором задано начальное положение (функция), назовем начальным множеством и обозначим через X , т. е.

$$X = \{ \varphi(\cdot) : z(t) = \varphi(t), \quad z(0) = \varphi(0) \in R^n \setminus M, \quad -h \leq t \leq 0 \}, \quad (4)$$

где $\varphi(t)$ — абсолютно непрерывная функция, определенная на отрезке $[-h, 0]$.

Пусть терминальное множество M является линейным подпространством R^n .

Преследование начинается из начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ и считается законченным в момент времени $t = t(\varphi(\cdot))$, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на множество M . Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Для системы с запаздыванием вида (1) в силу формулы Коши [6] имеет место представление

$$z(t) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 K(t-s-h)B\varphi(s)ds + \int_0^t K(t-s)[Cu(s) - Dg(s)]ds. \quad (5)$$

Определение 1. Будем говорить, что в игре (1)–(3) из начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = T(\varphi(\cdot))$, $0 \leq T < +\infty$, если существует функция $u(t, g)$, $0 \leq t < +\infty$, $g \in R^q$, $u(t, g) \in R^p$, что для произвольной суммируемой с квадратом функ-

ции $\mathcal{G}(t)$, $0 \leq t < +\infty$, $\mathcal{G}(t) \in R^q$, удовлетворяющей неравенству $\|\mathcal{G}(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \leq 1$, функция $u(t) = u(t, \mathcal{G}(t))$, $0 \leq t < +\infty$, является функцией с суммируемым квадратом, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \leq 1$ и траектория $z(t)$, $0 \leq t < +\infty$ соответствующего управления $(u(t), \mathcal{G}(t))$ уравнения (1) с учетом начального условия (4) попадает на терминальное множество M при некотором $t = t^* \in [0, T]$, т. е. удовлетворяет включению $z(t^*) \in M$.

Требуется найти начальные положения $\varphi(\cdot) \in X$ из которых в игре (1)–(3) возможно завершение преследования за конечное время T . Обозначим через π — матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на L , $\pi: R^n \rightarrow L$. Пусть τ — произвольное положительное число и $t \in [0, \tau]$.

Предположение 1. Существует число α , $0 \leq \alpha < 1$, такое, что для всех положительных t выполняется включение

$$\pi K(t)DV \subset \alpha \pi K(t)CU,$$

где $U = \{u \in R^p : \|u(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \leq 1\}$ и $V = \{\mathcal{G} \in R^q : \|\mathcal{G}(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \leq 1\}$ — единичные шары в пространствах управлений.

Далее полагаем, что это предположение на параметры игры выполнено. Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in X$.

Положим

$$\eta[\tau, \varphi(\cdot)] = \begin{cases} \frac{\xi[\tau, \varphi(\cdot)]}{\|\xi[\tau, \varphi(\cdot)]\|} & \text{при } \xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0, \\ \eta^0 & \text{при } \xi[\tau, \varphi(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

где η^0 — произвольный единичный вектор из L вектор-функция $\xi[T, \varphi(\cdot)]$ определена в ниже:

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = \pi K(\tau)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)B\varphi(t)dt,$$

Введем следующее многозначное отображение вида [4,5]:

$$\hat{W}(\tau, t, \mathcal{G}) = \{\lambda \in R : \lambda \eta[t, \varphi(\cdot)] + \pi K(\tau)D\mathcal{G} \in \sqrt{(1-\alpha)\|\xi[\tau, \varphi(\cdot)]\|^{-1}} \lambda + \alpha \|\mathcal{G}(\cdot)\|^2 \cdot \pi K(\tau)CU\}, \quad (6)$$

где $(\tau, t, \mathcal{G}) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times R^q$.

Далее, рассмотрим вспомогательную функцию, так называемую разрешающую функцию [4, 5]:

$$\lambda(\tau, t, \mathcal{G}, \varphi(\cdot)) = \sup \hat{W}(\tau, t, \mathcal{G}),$$

здесь в качестве супремума берется точная верхняя грань элемента множества $\hat{W}(\tau, t, \mathcal{G})$.

Теорема. Полагаем, что выполнено предположение 1 на параметры игры (1)–(3). Предположим, что существует момент времени $T = \tau(\varphi(\cdot))$ такой, что для всех допустимых управлений $\mathcal{G}(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\|\xi[\tau, \varphi(\cdot)]\| - \inf \left\{ \int_0^\tau \lambda(\tau, \tau - t, \mathcal{G}(t), \varphi(\cdot)) dt : \int_0^\tau \|\mathcal{G}(t)\|^2 dt \leq 1 \right\} \leq 0. \quad (7)$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2), (3) возможно завершение преследования за время $T = \tau(\varphi(\cdot))$.

Заключение

Научная новизна исследования состоит:

разработаны модификации первого метода задачи преследования и с помощью методов разрешающих функций предложены различные подходы для получения новых достаточных условий для возможности завершения преследования за конечное время.

Литература

1. Азамов А., Кучкаров А. Ш., Саматов Б. Т. О связи между задачами преследования, управляемости и устойчивости в целом в линейных системах с разнотипными ограничениями // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 71, № 2. – С. 259–263.
2. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 1. – С. 129–148.
3. Мамадалиев Н. Об одной линейной задаче преследования при наличии запаздывания // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 86–101.
4. Чикрий А. А., Белоусов А. А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 4. – С. 290–301.
5. Саматов Б. А. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования при интегральных ограничениях на управления // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», Киев. – 2013. – № 4. – С. 16–32.
6. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М. : Мир, 1967. – 254 с.

ОПЕРАТОРЫ МОНОДРОМИИ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А. Г. Баскаков¹, Г. В. Гаркавенко¹, Л. Н. Костина¹, Н. Б. Ускова²

¹Воронежский государственный университет

²Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В работе с использованием периодического эволюционного семейства определяется дифференциальный оператор с неограниченным операторным коэффициентом. Приводятся теоремы об эквивалентности этого оператора некоторым классам дифференциальных и разностных операторов с точки зрения совпадения состояний обратимости.

Ключевые слова: состояния обратимости, линейный дифференциальный оператор, метод эквивалентных операторов, оператор монодромии, семейство эволюционных операторов.

Введение

По семейству периодических эволюционных операторов, которое строится по дифференциальному уравнению с неограниченным периодическим операторным коэффициентом, определяется дифференциальный оператор. Вводятся понятия состояний обратимости и к исследуемому оператору применяется метод эквивалентных операторов. Получены теоремы об эквивалентности исходного оператора некоторым более простым классам операторов: разностному (ограниченному) оператору, оператору с постоянным операторным коэффициентом. Основная роль в исследовании принадлежит оператору монодромии.

1. Некоторые обозначения

Пусть X — комплексное банахово пространство и $End\ X$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов в X . Через $F = F(\mathbb{R}, X)$ обозначено одно из ниже перечисленных функциональных пространств: $L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$) измеримых по Бохнеру на $\mathbb{R}$ (классов эквивалентности) функций; пространство $C_b(\mathbb{R}, X)$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций; пространство $C_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций ($x \in C_b(\mathbb{R}, X)$, $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x\| = 0$); пространство Степанова $S_p(\mathbb{R}, X)$ локально суммируемых со степенью p измеримых на $\mathbb{R}$ функций, для которых конечна величина $\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^1 \|x(t+s)\|^p ds$.

Пусть $U : \{(t, s) \in \mathbb{R}^2, -\infty < s \leq t < +\infty\} \rightarrow End\ X$ — семейство эволюционных операторов (см. например [1, 2]).

Следуя работам [1–5] по семейству U определим линейный оператор $L_U : D(L_U) \subset F \rightarrow F$ следующим образом. Область определения $D(L_U)$ состоит из таких функций $x \in F$, для которых существует $f \in F$, такая что для почти всех $s \leq t$, $s, t \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$x(t) = U(t, s)x(s) - \int_s^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau, \text{ полагая } L_U(x) = f. \text{ Если } U \text{ — семейство эволюционных}$$

операторов для линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $A(t) : D(A(t)) \subset X \rightarrow X$ — семейство замкнутых линейных операторов, порождающих корректную задачу Коши [6], то $L_U = -\frac{d}{dt} + A(t)$ — абстрактный параболический оператор [4].

Применим к оператору L_U метод эквивалентных операторов (см. например [2, 7–9]), для чего введем необходимые понятия.

2. Состояния обратимости и метод эквивалентных операторов

Важным понятием метода эквивалентных операторов является понятие состояний обратимости.

Пусть $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$.

Определение 1. Рассмотрим следующие условия:

- 1) ядро оператора A состоит из одного нулевого элемента, $\text{Ker } A = \{0\}$, то есть оператор A инъективен;
- 2) размерность ядра $\text{Ker } A$ оператора A $1 \leq \dim \text{Ker } A \leq \infty$;
- 3) $\text{Ker } A$ — дополняемое подпространство либо в $D(A)$ с нормой графика оператора A , либо в X ;
- 4) $\text{Im } A = \overline{\text{Im } A}$ (оператор A нормально разрешим), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in D(A) \setminus \text{Ker } A} \frac{\|Ax\|}{\text{dist}(x, \text{Ker } A)},$$

где $\text{dist}(x, \text{Ker } A) = \inf_{x_0 \in \text{Ker } A} \|x - x_0\|$;

- 5) оператор A равномерно инъективен (корректен), т. е. $\text{Ker } A = \{0\}$, $\gamma(A) > 0$, в этом случае $\|Ax\| \geq \gamma \|x\|$;
- 6) $\text{Im } A$ — замкнутое, дополняемое в X подпространство и, следовательно, $\gamma(A) > 0$;
- 7) $\text{Im } A$ — замкнутое, дополняемое в X подпространство конечной коразмерности $1 \leq \text{codim } \text{Im } A = m \leq \infty$, где $\text{codim } \text{Im } A = \dim X / \dim \text{Im } A$;
- 8) $\text{Im } A = X$, т. е. A — сюръективный оператор;
- 9) оператор A непрерывно обратим, т. е. $\text{Ker } A = \{0\}$ и $\text{Im } A = X$.

Приведенные в определении условия будем рассматривать как некоторое подмножество из $\{1, 2, \dots, 9\}$. Оператор A находится в состоянии обратимости S_0 , если для оператора A выполняются все условия из совокупности $S_0 = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, $1 \leq k_i \leq 9$. Множество состояний обратимости оператора A обозначим $St_{inv}(A)$.

На практике нет необходимости перечислять все условия, которые выполняются для оператора A , а нужны лишь те, которые исследуются для него.

Определение 2. Линейные операторы $A_1 : D(A_1) \subset X_1 \rightarrow X_1$, $A_2 : D(A_2) \subset X_2 \rightarrow X_2$ называются эквивалентными, если $St_{inv}(A_1) = St_{inv}(A_2)$ и сильно эквивалентными, если они эквивалентны и их спектры совпадают.

Метод эквивалентных операторов состоит в построении для исследуемого оператора (обычно неограниченного) эквивалентного (обычно ограниченного) оператора, состояния обратимости которого можно легко исследовать.

В работах [1–3] впервые было показано, что для дифференциального оператора первого порядка эквивалентным является разностный оператор и предложена схема его построения.

Мы далее рассматриваем линейный дифференциальный оператор, определяемый в подходящем функциональном пространстве, задаваемый периодическим эволюционным семейством.

Определение 3. Семейство эволюционных операторов $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow X$ называется периодическим, периода $\omega > 0$, если $U(t + \omega, s + \omega) = U(t, s)$, $s \leq t$, $s, t \in \mathbb{R}$. Оператор L_U называется дифференциальным оператором с периодическим операторным коэффициентом, если соответствующее эволюционное семейство периодическое.

Пусть $A \in S_1(\mathbb{R}_+, \text{End } X)$ и $A(t + \omega) = A(t)$. В [10] рассматривается дифференциальное уравнение $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Операторная функция Коши $U : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$, для него удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = A(t)U(t), \\ U(0) = I. \end{cases}$$

В [10] показано, что $U(t + \omega) = U(t)U(\omega)$ и оператор $U(\omega)$ назывался оператором монодромии.

Лемма 1. Если $A(t + \omega) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ и есть корректная разрешимость задачи Коши, то эволюционное семейство периодически.

Определение 4. Оператор $U(\omega, 0)$ назовем оператором монодромии.

Так как для рассмотренного в [10] случая $U(\omega, 0) = U(\omega)U^{-1}(0) = U(\omega)$, то определение 4 согласуется с определением из [10] оператора монодромии.

Для функционального пространства $F = F(\mathbb{R}, X)$, следуя [2], введем ассоциативное ему дискретное функциональное пространство $F_d = F_d(\mathbb{Z}, X)$. Для $L_p(\mathbb{R}, X)$ ассоциативным является $l_p(\mathbb{Z}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$; для $C_b(\mathbb{R}, X)$ и $C_0(\mathbb{R}, X)$ ассоциированными являются $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ и $c_0(\mathbb{Z}, X)$ соответственно.

Далее мы рассмотрим случай $\omega = 1$. Рассмотрим разностный оператор D , действующий по формуле

$$(Dx)(n) = x(n) - U(n, n-1)x(n), \quad x \in F_d, n \in \mathbb{Z},$$

или, учитывая периодичность семейства U

$$(Dx)(n) = x(n) - U(1, 0)x(n-1), \quad x \in F_d, n \in \mathbb{Z}.$$

Оператор D является разностным оператором с постоянным операторным коэффициентом, равным оператору монодромии $U(1, 0)$ и к нему можно применить, например, результаты из [11].

Из [1, 2] вытекает

Теорема 1. Множество состояний обратимости дифференциального оператора с периодическим операторным коэффициентом L_U совпадают с множеством состояний обратимости разностного оператора с постоянным операторным коэффициентом D : $St_{inv}(L_U) = St_{inv}(D)$.

Теорема 2. Для того, чтобы оператор D был обратим в любом из пространств l_p , $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(U(1, 0)) \cap \mathbf{T} = \emptyset$, где через $\mathbf{T}$ обозначена единичная окружность.

Из [11, Теорема 6] следует

Теорема 3. Если оператор D обратим в любом из пространств l_p , $1 \leq p \leq \infty$, то он обратим в любом из пространств l_q , $1 \leq q \leq \infty$.

Таким образом, имеет место

Теорема 4. Оператор L_U , действующий в одном из пространств L_p , $1 \leq p \leq \infty$, обратим тогда и только тогда, когда $\sigma(U(1, 0)) \cap \mathbf{T} = \emptyset$. При этом, если он обратим в одном из пространств L_p , $1 \leq p \leq \infty$, то он обратим в любом из пространств L_q , $1 \leq q \leq \infty$.

Для обратимого оператора D (или L_U) $St_{inv}(D) = St_{inv}(L_U) = \{9\} = \{1, 8\}$.

Пусть теперь $U(1, 0)$ — компактный оператор. Тогда из результатов работ [7–9] вытекает

Теорема 5. Если $U(1, 0)$ является компактным оператором, то $St_{inv}(D) = St_{inv}(L_U) = \{2, 7\}$ с конечными показателями n и m .

Введем в рассмотрение полугруппу $T_U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } F$ вида $(T_U(t)x)(s) = U(s, s-t)x(s-t)$, $x \in F$, $s \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, очевидно, что

$$(T_U(1)x)(s) = U(s, s-1)x(s-1).$$

Из [1, теорема 2] следует

Теорема 6. Множества состояний обратимости операторов L_U и D_U совпадают: $St_{inv}(L_U) = St_{inv}(D_U)$, где $(D_U x)(s) = x(s) - U(s, s-1)x(s-1)$, $x \in F$, $s \in \mathbb{R}$.

Имеет место также следующая теорема.

Теорема 7. $St_{inv}(L_U) = St_{inv}(L_B)$, где $L_B = -\frac{d}{dt} + \ln U(1, 0)$, если оператор монодромии таков, что существует его логарифм.

Заключение

Основными результатами статьи являются условие обратимости оператора L_U , задаваемого с использованием периодического эволюционного семейства и результаты об эквивалентности оператора L_U операторам D_U , D и L_B . Эти результаты содержатся в теоремах 1, 4, 5, 6, 7, и существенным образом облегчают исследование оператора L_U .

Литература

1. Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков // Функ. анализ и его прил. – 1996. – Т. 30, № 3. – С. 1–11.
2. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН – 2013. – Т. 68, № 1 (409). – С. 77–128.
3. Баскаков А. Г. Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов / А. Г. Баскаков // Матем. заметки – 1996. – Т. 59, № 6. – С. 811–820.
4. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во МГУ, 1978.
5. Жиков В. В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения / В. В. Жиков // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1976. – Т. 40, № 6. – С. 1380–1408.
6. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967.
7. Баскаков А. Г. Состояния обратимости некоторых классов операторов / А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Л. Н. Костина, Н. Б. Ускова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2024. – № 2. – С. 27–35.
8. Баскаков А. Г. Об эквивалентных операторах / А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Л. Н. Костина, Н. Б. Ускова // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2024. – Т. 235. – С. 3–14.
9. Баскаков А. Г. О состояниях обратимости оператора с компактной резольвентой / А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Л. Н. Костина, Н. Б. Ускова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04–06 декабря 2023 года – Воронеж: Общество с ограниченной ответственностью «Вэлборн», Издательство «Научно-исследовательские публикации» – 2024. – С. 36–40.
10. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука. – 1970.
11. Баскаков А. Г. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов // Сиб. матем. журнал. – 2001. – Т. 42, № 6. – С. 1231–1242.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Е. П. Белоусова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается макроэкономическая модель Гудвина, основанная на идее взаимосвязи между уровнем заработных плат, безработицей и инфляцией. Классическая экономическая теория предполагает цикличность происходящих процессов. В этой статье изложена их математическая интерпретация и показано как можно использовать математические методы для анализа и прогноза динамики основных экономических показателей.

Ключевые слова: макроэкономика, математические методы в экономике, модель Гудвина, метод Пуанкаре.

Введение

Один из наиболее популярных вариантов модели Гудвина представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$\ddot{x} + A(x)\dot{x} + B(x) = 0. \quad (1)$$

В работе решается задача поиска условий существования предельного цикла в такой системе, вычисления его размера и доказательства устойчивости. Искомой функцией $x(t)$ здесь является отклонение суммарного дохода от положения равновесия. О функциях $A(x)$ и $B(x)$ известно, что они обладают свойством непрерывной дифференцируемости и $A(x)$ — четная по переменной x , а $B(x)$ — нечетная по x . Кроме того, относительно $A(x)$ есть предположение, что $A(x) < 0$.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - \alpha^2)\dot{x} + \beta^2 x = 0, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (2)$$

Здесь число μ — малый положительный параметр. Функция $A(x) = \mu(x^2 - \alpha^2)$, а функция $B(x) = \beta^2 x$. Исходя из условий задачи, предположим, что система (2) должна иметь устойчивое положение равновесия при определенных условиях, либо устойчивый предельный цикл, если состояние равновесия становится неустойчивым [1,2]. Линеаризуем коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ в окрестности нуля, разложив их в ряд Тейлора. Получим уравнение

$$\ddot{x} - \mu\alpha^2\dot{x} + \beta^2 x = 0. \quad (3)$$

Поскольку второй коэффициент отрицательный, то положение равновесия по спектральному признаку устойчивостью не обладает [3, 4]. Поэтому следующий шаг состоит в доказательстве существования предельного цикла [5]. Перепишем уравнение (2) в виде

$$\ddot{x} + \beta^2 x = \mu(\alpha^2 - x^2)\dot{x} \quad (4)$$

и введем обозначение

$$f(x, \dot{x}) = (\alpha^2 - x^2)\dot{x}. \quad (5)$$

Тогда имеет место система

$$\ddot{x} + \beta^2 x = \mu f(x, \dot{x}). \quad (6)$$

Если $\mu = 0$, то однородное уравнение $\ddot{x} + \beta^2 x = 0$ имеет решение

$$x_0(t) = A \cos \beta t + B \sin \beta t. \quad (7)$$

Его называют порождающим. Исходя из условий задачи, очевидно что, $x_0(0) = A \neq 0$ и $\dot{x}_0(0) = 0$. Тогда порождающее решение $x_0(t) = A \cos \beta t$. Без уменьшения общности, будем считать, что $\beta = 1$. Если $\mu \neq 0$ то периодические решения системы (6) в общем случае отсутствуют.

ют. Но для некоторых правых частей и при определенных начальных условиях такие решения можно найти [6, 7]. Очевидно, что при $\mu = 0$ уравнение (6) имеет периодическое решение с периодом 2π . Правая часть этого уравнения является аналитической по переменным $x, \dot{x}$ и параметру μ . Поэтому, согласно теореме Пуанкаре [6], решение $x(t)$ можно искать в виде ряда по степеням малого параметра

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots \quad (8)$$

Заметим, что функции $x_1(t), x_2(t), \dots$ не будут обладать свойством периодичности. Решение $x(t)$ уравнения (6) имеет частоту, зависящую от параметра μ . Порождающая функция $x_0(t)$ имеет частоту равную 1. Устранить этот дисбаланс с помощью периодических функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ не представляется возможным. Поэтому введем новый масштаб времени, чтобы избавиться от возникающих затруднений. Пусть $s = \omega t$, где ω — искомая частота периодического решения уравнения

$$\ddot{x} + x = \mu(\alpha^2 - x^2)\dot{x}, \quad (9)$$

зависящая от μ . В новом времени частота искомых колебаний уже не зависит от параметра, а период равен 2π . Уравнение (10) в новых обозначениях приобретает вид

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{ds^2} + x = \mu(\alpha^2 - x^2)\omega \frac{dx}{ds}. \quad (10)$$

Представим величины ω и ω^2 в виде степенных рядов. А именно

$$\omega = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \omega_n \quad (11)$$

и

$$\omega^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \Omega_n. \quad (12)$$

Первые слагаемые в (11) и (12) представляют собой циклическую частоту порождающего решения. Подставляя (11) и (12) в (10), получим уравнение

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \Omega_n\right) \frac{d^2 x}{ds^2} + x = \mu(\alpha^2 - x^2) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \omega_n\right) \frac{dx}{ds}. \quad (13)$$

Его решение будем искать в виде ряда

$$x(s) = x_0(s) + \mu x_1(s) + \mu^2 x_2(s) + \dots \quad (14)$$

Период функций $x_0(s)$ и $x(s)$ равен 2π . Поэтому теперь можно искать функции $x_1(s), x_2(s), \dots$ как периодические функции периода 2π . Разложим по степеням параметра μ и нелинейную функцию

$$f\left(x, \omega \frac{dx}{ds}\right) = f_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n f_n(s), \quad (15)$$

где

$$f_0(s) = f\left(x_0(s), \frac{dx_0(s)}{ds}\right). \quad (16)$$

Подставляя представления (14) и (15) в уравнение (10), получим

$$(1 + \mu \Omega_1 + \mu^2 \Omega_2 + \dots) \left(\frac{d^2 x_0}{ds^2} + \mu \frac{d^2 x_1}{ds^2} + \mu^2 \frac{d^2 x_2}{ds^2} + \dots \right) + x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots$$

Тогда имеет место

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x_0}{ds^2} + x_0 = 0, \\ \frac{d^2 x_1}{ds^2} + x_1 = -\Omega_1 \frac{d^2 x_0}{ds^2} + f_0 = G_1(s), \\ \dots \\ \frac{d^2 x_n}{ds^2} + x_n = G_n(s). \end{array} \right. \quad (17)$$

Число A подлежит определению. Подставляя $x_0(s)$ в правую часть второго уравнения из (17), получим

$$\frac{d^2 x_1}{ds^2} + x_1 = \Omega_1 A \cos s + f(A \cos s, -A \sin s) = G_1(s).$$

Решение этого уравнения представимо в виде

$$x_1(s) = X_1(s) + \int_0^s G_1(u) \sin(s-u) du,$$

где $x_1(s) = A_1 \cos s + B_1 \sin s$ общее решение уравнения

$$\frac{d^2 x_1}{ds^2} + x_1 = 0,$$

а второе слагаемое представляет собой интеграл Дюамеля [8]. Тогда имеем

$$x_1(s) = A_1 \cos s + B_1 \sin s + \Omega_1 A \int_0^s \sin(s-u) \cos u du + \int_0^s f(A \cos u, -A \sin u) \sin(s-u) du. \quad (18)$$

Применим теперь условия периодичности на функцию x_1 и ее первую производную. Получим

$$x_1(0) = x_1(2\pi) \quad \text{и} \quad \frac{dx_1}{ds}(0) = \frac{dx_1}{ds}(2\pi).$$

Подставляя в эти равенства представление функции $x_1(s)$, составим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} f(A \cos u, -A \sin u) \sin u du = 0, \\ \Omega_1 = -\frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} f(A \cos u, -A \sin u) \cos u du. \end{array} \right. \quad (19)$$

Из первого уравнения системы (19) находим $A = 2\alpha$. Второе уравнение из (19) позволяет определить поправку на частоту автоколебаний [5, 9]. Так что в первом приближении $\omega^2 \approx 1 + \mu\Omega_1$. В нашем случае $\Omega_1 = 0$. Покажем, что предельный цикл в изучаемой системе будет устойчивым. Преобразуем уравнение второго порядка (9) к системе двух уравнений первого порядка. А именно

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu(\alpha^2 - x^2)y. \end{array} \right. \quad (20)$$

Обозначим правые части системы (20) следующим образом. Пусть $P(x, y) = y$ и $Q(x, y) = -x + \mu(\alpha^2 - x^2)y$. Устойчивость предельного цикла и устойчивость в смысле Ляпунова соответствующих периодических движений [10, 11] определяется знаком характеристического показателя

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T (P'_x(\varphi(t), \psi(t)) + Q'_y(\varphi(t), \psi(t))) dt, \quad (21)$$

где $x = \varphi(t), y = \psi(t), T$ — период решения. В нашем конкретном случае $\varphi(t) = 2\alpha \cos t, \psi(t) = -2\alpha \sin t, T = 2\pi$. Предельный цикл устойчив, если $h < 0$ и неустойчив, если $h > 0$. Проведя необходимые вычисления, найдем показатель Ляпунова для нашей задачи. Он имеет вид

$$h = -\mu\alpha^2 < 0. \quad (22)$$

Заключение

Таким образом, изложенные вычисления и доказательства показывают, что при малых значениях параметра μ уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu(\alpha^2 - x^2)\dot{x},$$

имеет предельный цикл, радиус которого равен 2α , а частота соответствующих колебаний равна собственной частоте системы при $\mu = 0$. Это означает, что количественный размер предельного цикла, который отображает периодические колебания, возникающие в экономической системе Гудвина определяется значением, входящего в нее параметра α . Кроме того, этот предельный цикл является устойчивым, в отличие от нулевого положения равновесия. Исходя из полученных результатов, очевидно, что желаемая устойчивая цикличность экономического процесса, позволяющая благополучно развиваться государству возникает далеко не всегда. Для этого должны выполняться ряд довольно жестких требований. Кроме того, сделать выводы о том в какие рамки будет укладываться эта цикличность тоже довольно сложно с практической точки зрения. Но если это удастся, то можно строить долгосрочные прогнозы относительно развития и уровня основных экономических показателей, которые это развитие будут обеспечивать.

Литература

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Издательство МЦНМО, 2024. – 342 с.
2. Боровских А. В. Дифференциальные уравнения: учебник и практикум для академического бакалавриата: [для студ. вузов, обуч. по естественно-науч. направлениям]: в 2 ч. / А. В. Боровских, А. И. Перов. – Ч. 1. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2017. – 326 с.
3. Андреев А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М. : Наука, 1966. – 568 с.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М. : Лань, 2023. – 477 с.
5. Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний // Собр. трудов. – М. : Изд-во АН СССР, 1956. – С. 41.
6. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний. – Изд-во Красноярского университета, 1995. – 429 с.
7. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М. : Наука, 1975. – 244 с.
8. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. – М. : Гостехиздат, 1949. – 244 с.
9. Харкевич А. А. Автоколебания. Государственное издательство технико-теоретической литературы. – М. : Гостехиздат, 1954. – 170 с.
10. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М. : Наука, 1971. – 305 с.
11. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М. : Физматгиз, 1959. – 211 с.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИЙ НА ПРИМЕРЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

А. С. Бердников, А. Л. Буляница, А. А. Евстапов

Институт аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург

Аннотация. В работе описан алгоритм построения приближенных численно-аналитических решений систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение зависит от параметров и учитывает начальные условия. Алгоритм обобщает метод коллокаций К. Ланцоша и обеспечивает минимизацию ошибки приближенного решения, понимаемую как разность между приближенным и точным решением. В качестве примера реализации алгоритма исследуется приближенное решение уравнения Матье.

Ключевые слова: приближенное аналитическое решение, обыкновенное дифференциальное уравнение, система обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнение Матье, метод коллокаций К. Ланцоша, точки коллокации, минимизация ошибки, дифференциальная и интегральная невязка, полиномы Чебышева первого рода, корни полиномов Чебышева, теория Флоке — Ляпунова.

Введение

Многие математические модели физических систем описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В связи с этим аналитические решения таких уравнений являются важным инструментом математической физики, и справочники, в которых приведены такие решения, востребованы [1]. При этом, несмотря на огромный объем работы, проведенный математиками в этом направлении, доля уравнений, для которых найдены эти решения, мала. Появление численных методов и их реализация с помощью современных ЭВМ явилось прорывом в этой области и позволило существенно расширить наши знания о поведении соответствующих математических моделей.

К сожалению, в большинстве случаев, требуется получить не просто одиночное решение, а решение, зависящее от параметров модели, предпочтительно, в аналитической форме. Большинство численных методов позволяют получить решение только при фиксированном (заданном) наборе параметров. Это затрудняет исследование свойств модели и усложняет оптимизацию описываемой ею системы (объекта) в зависимости от ее параметров.

В данной работе рассмотрен алгоритм конструирования приближенных решений линейных ОДУ в аналитической форме, зависящей от параметров, входящих в уравнение, и заданных начальных условий. Алгоритм обобщает метод коллокаций Ланцоша [2]. В отличие от исходного метода Ланцоша, ориентированного на минимизацию невязки уравнения, этот алгоритм ориентирован на минимизацию ошибки приближенного решения, понимаемую, как разность между приближенным и точным решениями.

1. Некоторые свойства решений уравнения Матье

Работа алгоритма демонстрируется на примере конструирования приближенного решения уравнения Матье, зависящего от его параметров (a, q) и начальных условий $x(0)$, $x'(0)$. Отличительной особенностью рассматриваемого уравнения (как и любой системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами) является то, что достаточно знать фундаментальную систему решений на одном периоде независимой переменной, чтобы иметь возможность вычислять решение в любой точке числовой прямой.

Уравнение Матье описывает различные процессы, например, параметрические колебания с периодически меняющейся массой или жесткостью системы, колебания при параметрическом изменении нагрузки или точки подвеса и т. п. В книге [3] приложения уравнения и функций Матье описываются более детально. В частности, среди приложений функций Матье также указаны: искажение амплитуды в громкоговорителе с подвижной катушкой, электрическая цепь с периодически меняющимся сопротивлением, колебание струны с периодически меняющимся натяжением.

Преобразуем уравнение Матье, представленное в каноническом виде как [3]

$$x''(t) + (a - 2q \cos 2t)x(t) = 0, \quad (1)$$

к эквивалентной форме в виде системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами:

$$\begin{cases} x' = p, \\ p' = -(a - 2q \cos 2t)x, \\ x(0) = x_0, \quad p(0) = p_0. \end{cases} \quad (2)$$

Система уравнений (2) описывает гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H(p, x) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2(a - 2q \cos 2t). \quad (3)$$

Согласно теории Флоке — Ляпунова [4, 5] решения системы (2) можно представить как

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{xx}(t) & W_{xp}(t) \\ W_{px}(t) & W_{pp}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ P(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}(t) \mathbf{Y}(t), \quad (4)$$

где $\mathbf{W}(t)$ — периодическая либо антипериодическая (то есть меняющая знак при сдвиге на период) квадратная матрица 2×2 , имеющая период π и зависящая от параметров a, q , но не от начальных условий, а $\mathbf{Y}(t)$ — решение некоторой системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которое может быть записано в аналитическом виде.

Действительно, в силу линейности системы (2) её общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x(t) & X_p(t) \\ P_x(t) & P_p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $X_x(t)$, $P_x(t)$, $X_p(t)$, $P_p(t)$ это фундаментальные решения системы (2) с начальными условиями $x_0 = 1$, $p_0 = 0$ и $x_0 = 0$, $p_0 = 1$ соответственно. Поскольку коэффициенты линейной системы уравнений (2) являются периодическими с периодом $T = \pi$, то функции $x(t+T)$, $p(t+T)$ также удовлетворяют системе уравнений (2) и, следовательно, представляют собой суперпозицию фундаментальных решений:

$$\begin{pmatrix} x(t+T) \\ p(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x(t+T) & X_p(t+T) \\ P_x(t+T) & P_p(t+T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x(t) & X_p(t) \\ P_x(t) & P_p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_T \\ p_T \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Значения $x_T = x(T)$, $p_T = p(T)$ связаны с $x_0 = x(0)$, $p_0 = p(0)$ линейным соотношением

$$\begin{pmatrix} x_T \\ p_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x(T) & X_p(T) \\ P_x(T) & P_p(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{xx}^T & V_{xp}^T \\ V_{px}^T & V_{pp}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \mathbf{V}_T \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Матрица $\mathbf{V}_T$ не зависит от начальных значений, но зависит от параметров a, q . Она описывает важные свойства решения уравнения Матье и, в частности, определяет устойчивость либо неустойчивость решений системы (2) при данных параметрах.

В силу гамильтоновости уравнений (2) выполняется условие $V_{xx}^T V_{pp}^T - V_{xp}^T V_{px}^T = 1$, а в силу симметричности коэффициентов системы (2) относительно точки середины периода $t_* = \pi/2$

выполнено условие $V_{xx}^T = V_{pp}^T$. Возможны следующие варианты параметрического представления коэффициентов матрицы V_T , где L, φ это некоторые константы:

А) если $-1 < V_{xx}^T < +1$, то $V_{xx}^T = V_{pp}^T = \cos \varphi$, $V_{xp}^T = L \sin \varphi$, $V_{px}^T = (-1/L) \sin \varphi$,

Б) если $V_{xx}^T > +1$, то $V_{xx}^T = V_{pp}^T = \cosh \varphi$, $V_{xp}^T = L \sinh \varphi$, $V_{px}^T = (1/L) \sinh \varphi$,

В) если $V_{xx}^T < -1$, то $V_{xx}^T = V_{pp}^T = -\cosh \varphi$, $V_{xp}^T = L \sinh \varphi$, $V_{px}^T = (1/L) \sinh \varphi$.

Для каждого из этих случаев можно определить вспомогательные матрицы,

$$V(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi t/T) & L \sin(\varphi t/T) \\ (-1/L) \sin(\varphi t/T) & \cos(\varphi t/T) \end{pmatrix}, \quad (8a)$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi t/T) & L \sinh(\varphi t/T) \\ (1/L) \sinh(\varphi t/T) & \cosh(\varphi t/T) \end{pmatrix}, \quad (8б)$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} -\cosh(\varphi t/T) & L \sinh(\varphi t/T) \\ (1/L) \sinh(\varphi t/T) & -\cosh(\varphi t/T) \end{pmatrix}, \quad (8в)$$

которые удовлетворяют условиям $V(T) = V_T$. Кроме того, для случаев (8a) и (8б) выполняется условие $V(t_i)V(t_2) = V(t_i + t_2)$, а для случая (8в) условие $V(t_i)V(t_2) = -V(t_i + t_2)$. Равенство (5) можно преобразовать к виду

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \Phi(t) V(-t) V(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = W(t) V(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где матрица $W(t) = \Phi(t)V(-t)$ в силу условий (6), (7) будет периодической (для случаев (8a) и (8б)) либо анти-периодической (для случая (8в)):

$$\begin{pmatrix} x(t+T) \\ p(t+T) \end{pmatrix} = \Phi(t+T) \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \Phi(t) V_T \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t+T) \equiv \Phi(t) V_T,$$

$$\Phi(t+T) V(-t-T) V(t) V(T) \equiv \pm \Phi(t) V(-t) V(t) V(T),$$

$$W(t+T) \equiv \pm W(t),$$

где матрица $V(t)$ невырожденная.

Таким образом, для того, чтобы построить для выбранных значений параметров a, q и произвольных начальных условий x_0, p_0 приближенное решение уравнения Матье при любых $t \geq 0$, достаточно получить приближенную матрицу фундаментальных решений на интервале $t \in [0, \pi]$. Это позволяет определить матрицу V_T , что, в свою очередь, позволяет вычислять как матрицу $V(t)$ при любых значениях переменной t , так и периодическую (антипериодическую) матрицу $W(t)$ на интервале $t \in [0, \pi]$.

2. Алгоритм коллокаций, ориентированный на ошибку решения

Рассмотрим на конечном интервале $t \in [t_a, t_b]$ систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1N}(t)x_N(t) + b_1(t), \\ \dots \\ x_N'(t) = a_{N1}(t)x_1(t) + a_{N2}(t)x_2(t) + \dots + a_{NN}(t)x_N(t) + b_N(t), \end{cases} \quad (10)$$

$$x_1(t_a) = x_{10}, x_2(t_a) = x_{20}, \dots, x_N(t_a) = x_{N0}.$$

В векторной форме эта система записывается как

$$\mathbf{x}'(t) = L[\mathbf{x}(t)], \quad (11)$$

где L — соответствующий линейный оператор.

Идея тау-метода Ланцоша [2] состоит в замене точных дифференциальных уравнений (11) на приближенные дифференциальные уравнения

$$\mathbf{x}(t) - L[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{f}(t), \quad (12)$$

где вектор-функция невязки $\mathbf{f}(t)$ дифференциального уравнения (дифференциальная невязка) выбирается таким образом, чтобы а) система (12) имела точное решение в аналитической форме, б) невязка $\mathbf{f}(t)$ была как можно меньше в смысле минимаксной нормы. В таком случае точное решение уравнений (12) может использоваться в качестве приближенного решения уравнений (11), причем ожидается, что ошибка будет мала в силу малости невязки $\mathbf{f}(t)$.

К сожалению, такая конструкция возможна только для уравнений специального вида — в частности, для дифференциальных уравнений с полиномиальными либо тригонометрическими коэффициентами [2]. Для расширения классов уравнений, для которых может применяться подобный подход, был предложен метод коллокаций Ланцоша [2]. Здесь тождественное выполнения равенства (12) заменяется на выполнение равенства (12) в отдельных точках (точках коллокации), а минимизация невязки $\mathbf{f}(t)$ на исследуемом интервале заменяется на обращение невязки в ноль в точках коллокации. В качестве точек коллокации используются нули многочленов Чебышева первого рода, что предположительно должно обеспечивать малое отклонение невязки от нуля в остальных точках рассматриваемого интервала. Подробное изложение и обоснование соответствующего алгоритма можно найти в [2].

Однако минимизация невязки дифференциального уравнения не эквивалентна минимизации ошибки (разности между приближенным решением и точным решением). Примером могут служить уравнения $x''(t) + x(t) = 0$ и $x''(t) + x(t) = \varepsilon \sin(t)$, где при сколь угодно малой невязке в правой части решения с одинаковыми начальными условиями расходятся сколь угодно далеко, если взять достаточно большой интервал времени. В данной статье рассматривается модификация метода коллокаций Ланцоша, целью которой является минимизация ошибки приближенного решения.

Пусть приближенное решение $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$ системы линейных дифференциальных уравнений (10) ищется в виде линейной комбинации

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1, M} \mathbf{c}_k \varphi_k(t), \quad (13)$$

где $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_M(t)$ — фиксированные базисные функции (например, полиномы от независимой переменной t), а $\mathbf{c}_k = (c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kN})$, где $k = 1, 2, \dots, M$ — неизвестные коэффициенты, которые требуется найти. После подстановки приближенного решения (13) в уравнения (10) получаются точно решаемые уравнения (11) с ненулевыми правыми частями (дифференциальными невязками системы уравнений (10)), которые представляют собой линейные комбинации известных функций с пока что неизвестными коэффициентами.

От дифференциальной формы (10) перейдем к эквивалентной интегральной форме

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} + \int_{t_0}^t (a_{11}(\tau)x_1(\tau) + \dots + a_{1N}(\tau)x_N(\tau) + b_1(\tau))d\tau, \\ \dots \\ x_N(t) = x_{N0} + \int_{t_0}^t (a_{N1}(\tau)x_1(\tau) + \dots + a_{NN}(\tau)x_N(\tau) + b_N(\tau))d\tau. \end{cases} \quad (14)$$

В векторной форме система уравнений (14) записывается как

$$\mathbf{x}(t) = J[\mathbf{x}(t)], \quad (15)$$

где J — соответствующий интегральный линейный оператор. После подстановки приближённого решения (13) в уравнения (15) получаем систему точно решаемых интегральных уравнений

$$\mathbf{x}(t) - J[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{F}(t), \quad (16)$$

где $\mathbf{F}(t)$ это интегральная невязка уравнений (10), представляющая собой линейную комбинацию фиксированных функций с произвольно выбираемыми коэффициентами. Задача состоит в таком выборе этих коэффициентов, чтобы минимизировать ошибку между решением приближенных систем уравнений (12) и (16) и решением точных систем уравнений (11) и (15). Оптимальная дифференциальная невязка $\mathbf{f}(t)$ в уравнениях (12) является производной первого порядка от оптимальной интегральной невязки $\mathbf{F}(t)$ в уравнениях (16).

Теорема Пикара [5] о существовании и единственности решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений утверждает, что итерационный процесс

$$\mathbf{x}_{k+1}(t) = J[\mathbf{x}_k(t)] \quad (17)$$

независимо от выбора начальной функции быстро сходится к некоторому стационарному значению, которое тем самым будет тем самым единственным решением как системы уравнений (15), так и системы уравнений (11). Кроме того, из этой теоремы следует, что справедлива оценка

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k(t)\| \leq C \|\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)\|, \quad (18)$$

где $\mathbf{x}(t)$ это точное решение, $\|\cdot\|$ это минимаксная норма на рассматриваемом интервале, C это некоторая константа, которая зависит от коэффициентов системы уравнений и рассматриваемого интервала, но не зависит ни от начальных условий, ни от пробных решений $\mathbf{x}_k(t)$. Поэтому минимизация интегральной невязки $\mathbf{F}(t)$ приводит к минимизации ошибки приближенного решения, если в качестве приближенного решения использовать точное решение системы интегральных уравнений (16).

На рассматриваемом интервале интегральная невязка $\mathbf{F}(t)$ всегда может быть приближена некоторым полиномом. Требование минимизации $\mathbf{F}(t)$ означает, этот полином должен быть пропорционален полиному Чебышева первого рода, наименее отклоняющемуся от нуля на интервале $[-1, +1]$ и пересчитанному к интервалу $t \in [t_a, t_b]$. Тогда система интегральных уравнений (16) приобретает вид

$$\mathbf{x}(t) - J[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{s}T_K(t), \quad (19)$$

где $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ это дополнительные неизвестные коэффициенты, $T_K(t)$ это полином Чебышева первого рода степени K , пересчитанный к интервалу $t \in [t_a, t_b]$, а приближенное равенство заменено точным. Выбор нужного значения для степени K будет выполнен позднее.

Из уравнений (19) при $t = t_a$ получаются начальные условия для решения (13):

$$\sum_{k=1, M} \mathbf{c}_k \varphi_k(t_a) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{s}T_K(t_a). \quad (20)$$

Так как дифференциальная невязка $\mathbf{f}(t)$ это производная интегральной невязки $\mathbf{F}(t)$, то из уравнений (12), рассматриваемых в коллокационных точках t_j , получаются условия

$$\sum_{k=1, M} \mathbf{c}_k \varphi'_k(t_j) - L \left[\sum_{k=1, M} \mathbf{c}_k \varphi_k(t_j) \right] = \mathbf{s} \frac{dT_K(t_j)}{dt}. \quad (21)$$

Перейдём к выбору степени K для полинома Чебышева. Есть MN свободных коэффициентов для приближенного решения (13) и N свободных множителей для интегральной невязки (19). Так как уже имеются N уравнений (20), то нужно M коллокационных точек t_j , чтобы получить MN дополнительных уравнений (21). При таком выборе есть $(M+1)N$ уравнений и $(M+1)N$ неизвестных, то есть набор линейных алгебраических уравнений позволяет одно-

значно определить все неизвестные коэффициенты. Поскольку M коллокационных точек с заданными значениями невязки соответствуют аппроксимационному многочлену степени $M-1$, то производная многочлена Чебышева $T_K(t)$ имеет степень $M-1$, а сам многочлен $T_K(t)$ имеет степень $K=M$. Наконец, согласно условию оптимальной аппроксимации полиномами [2] эти M вспомогательных точек t_j должны совпадать с нулями многочлена Чебышева первого рода степени M , который пересчитан к интервалу $t \in [t_a, t_b]$.

3. Приближенные решения уравнения Матъё

В соответствии с результатами раздела 1 для того, чтобы иметь возможность вычислять решение уравнения Матъё (1) при любых значениях переменной t , достаточно знать приближенные выражения для матрицы фундаментальных решений при $t \in [0, \pi]$. Алгоритм, изложенный в предыдущем разделе, позволяет конструировать приближенные аналитические выражения, зависящие в аналитическом виде от параметров (a, q) , но получаемые на выходе выражения достаточно громоздки. Для иллюстрации работы алгоритма ограничимся двумя численными примерами, в которых приближенные решения конструируются в виде полиномов 7-й степени при конкретных численных значениях параметров (a, q) :

$$\begin{cases} X_x(t) \approx a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + a_7 t^7, \\ P_x(t) \approx b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 + b_6 t^6 + b_7 t^7, \\ X_p(t) \approx c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 + c_6 t^6 + c_7 t^7, \\ P_p(t) \approx d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4 + d_5 t^5 + d_6 t^6 + d_7 t^7. \end{cases} \quad (22)$$

Пусть $a = 0.1$, $q = 0.5$. При этих параметрах матрица $\mathbf{V}_T$, определяющая пересчет решения из точки $t = 0$ к точке $t = \pi$, соответствует режиму устойчивости:

$$\mathbf{V}_T = \begin{pmatrix} 0.881 & 5.236 \\ -0.0427 & 0.881 \end{pmatrix}.$$

Для этого режима коэффициенты приближенного решения (22) имеют значения:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.9997, \quad a_1 = 0.0120, \quad a_2 = -0.5255, \quad a_3 = 0.1430, \quad a_4 = 0.1330, \\ a_5 &= -0.0664, \quad a_6 = 0.0094, \quad a_7 = -0.0004, \\ b_0 &= 0.0000, \quad b_1 = -0.8899, \quad b_2 = -0.1863, \quad b_3 = 1.5579, \quad b_4 = -1.2028, \\ b_5 &= 0.4497, \quad b_6 = -0.0924, \quad b_7 = 0.0082, \\ c_0 &= -0.0008, \quad c_1 = 1.0349, \quad c_2 = -0.2455, \quad c_3 = 0.4658, \quad c_4 = -0.7173, \\ c_5 &= 0.5469, \quad c_6 = -0.1626, \quad c_7 = 0.0161, \\ d_0 &= 1.0013, \quad d_1 = -0.0426, \quad d_2 = -0.3159, \quad d_3 = -0.0127, \quad d_4 = 0.3098, \\ d_5 &= 0.1191, \quad d_6 = -0.1371, \quad d_7 = 0.0227. \end{aligned}$$

На рис. 1а показаны графики приближенного и численно полученного решения для функции $X_x(t)$ (графики визуально совпадают), а график ошибки приближенного решения $D_{xx}(t)$ представлен на рис. 1б.

Другие компоненты фундаментального решения, а именно $P_x(t)$, $X_p(t)$ и $P_p(t)$ имеют диапазоны изменения от -0.4 до 0.3 , от 0 до 5.3 и от 0.9 до 2.8 соответственно. При этом, максимальные по величине ошибки приближенного решения составляют 0.0025 , 0.0033 и 0.009 .

Пусть $a = 0.5$, $q = 0.25$. Матрица $\mathbf{V}_T$, определяющая пересчет решения из точки $t = 0$ к точке $t = \pi$, соответствует режиму неустойчивости:

$$\mathbf{V}_T = \begin{pmatrix} 4.4539 & 7.4789 \\ 2.5187 & 4.4539 \end{pmatrix}.$$

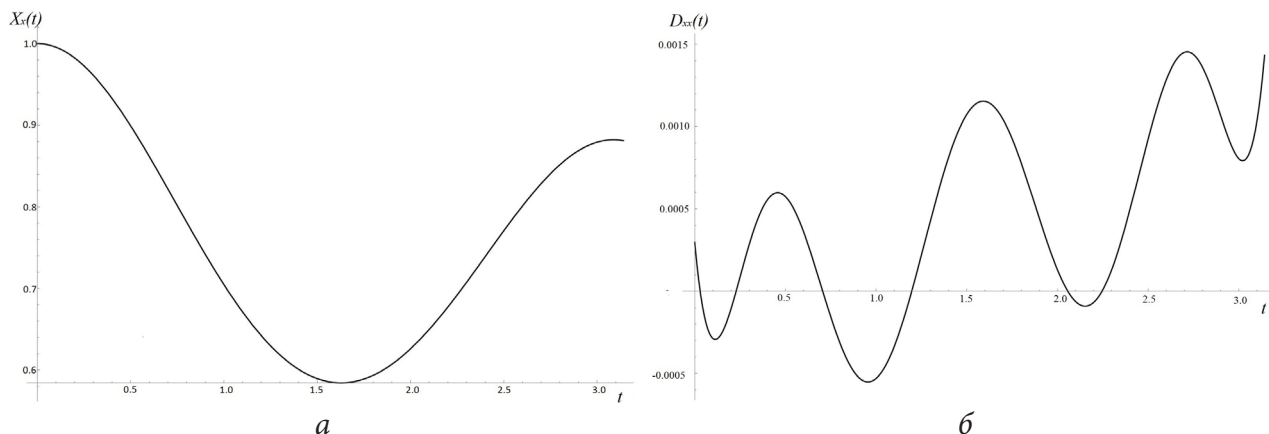


Рис. 1. График решения $X_x(t)$ (а) и соответствующей ошибки $D_{xx}(t)$ (б)

Для этого режима коэффициенты приближенного решения (22) имеют значения:

$$a_0 = 0.9997, \quad a_1 = 0.0143, \quad a_2 = -0.0965, \quad a_3 = 0.2315, \quad a_4 = -0.1677,$$

$$a_5 = 0.1282, \quad a_6 = -0.0389, \quad a_7 = 0.0039,$$

$$b_0 = 0.0002, \quad b_1 = -0.0045, \quad b_2 = -0.0250, \quad b_3 = 0.5290, \quad b_4 = -0.3772,$$

$$b_5 = 0.2263, \quad b_6 = -0.0780, \quad b_7 = 0.0096,$$

$$c_0 = -0.0005, \quad c_1 = 1.0198, \quad c_2 = -0.1365, \quad c_3 = 0.3436, \quad c_4 = -0.4086,$$

$$c_5 = 0.3047, \quad c_6 = -0.0871, \quad c_7 = 0.0084,$$

$$d_0 = 1.0005, \quad d_1 = -0.0147, \quad d_2 = 0.0441, \quad d_3 = 0.0108, \quad d_4 = 0.1268,$$

$$d_5 = 0.1077, \quad d_6 = -0.0855, \quad d_7 = 0.0131.$$

Максимальные по величине ошибки приближенных решений для функций $X_x(t)$, $P_x(t)$, $X_p(t)$ и $P_p(t)$, составляют 0.0012, 0.0021, 0.0014 и 0.003, что также свидетельствует о высокой точности приближения.

Заключение

В данной работе приводится и обосновывается новый алгоритм коллокаций для приближенного численно-аналитического решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Алгоритм ориентирован на минимизацию ошибки (разности между точным и приближенным решением). На примере решения уравнения Матё показана высокая точность численно-аналитических решений, получаемых с помощью данного алгоритма.

Благодарности

Работа выполнена в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 075-00439-24-00.

Александр Бердников благодарит д-ра А. Компаньера (Aaldert Compagner) с факультета вычислительной физики Дельфского технического университета (TU Delft) за финансовую и дружескую поддержку совместных работ по датчикам псевдослучайных чисел в 1990–1996 гг., во время которых были заложены идейные основы данного исследования.

Литература

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. / Э. Камке. – 4-е изд., испр. – Москва : Наука: Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. – 576 с.

2. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа: Справочное руководство. Пер. с англ. М. З. Кайнера; Под ред. А. М. Лопшица. / К. Ланцош – Москва : Физматгиз, 1961. – 524 с.
3. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. Пер. с англ. / Н. В. Мак-Лахлан. – Москва : Изд-во иностранной литературы, 1953. – 479 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер – 5-е изд. – Москва : Физматлит, 2010. – 560 с.
5. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. – 3-е изд., стереотипное. – Москва : Изд-во МЦНМО, 2024–344 с.

К ВОПРОСУ ОБ УРАВНЕНИИ ЭВОЛЮТЫ КРИВОЙ

С. Б. Богданова, С. О. Гладков

Московский авиационный институт

Аннотация. Предложен универсальный подход к составлению уравнения эволюты кривой, избегая ее параметрического задания. Получено уравнение эволюты в полярных координатах, а также выражение для ее кривизны. С помощью компьютерного моделирования приведены эволюты для спирали Архимеда, трехлепестковой розы и кардиоиды, а также проиллюстрировано графическое сравнение всех этих кривых.

Ключевые слова: кривизна кривой, эволюта, полярные координаты, компьютерное моделирование.

Введение

Важной характеристикой плоской гладкой кривой, как хорошо известно [1–3], является ее кривизна, по определению равная

$$K = \frac{d\alpha}{ds},$$

где $d\alpha$ дифференциал угла, образованного касательной к кривой и горизонтальной осью системы координат, а ds — соответствующий дифференциал длины дуги кривой. Величина $R = \frac{1}{|K|}$, радиус кривизны, определяет так называемый центр кривизны N , расположенный на нормали к данной кривой (рис. 1). Геометрическое место точек центров кривизны называется эволютой кривой.

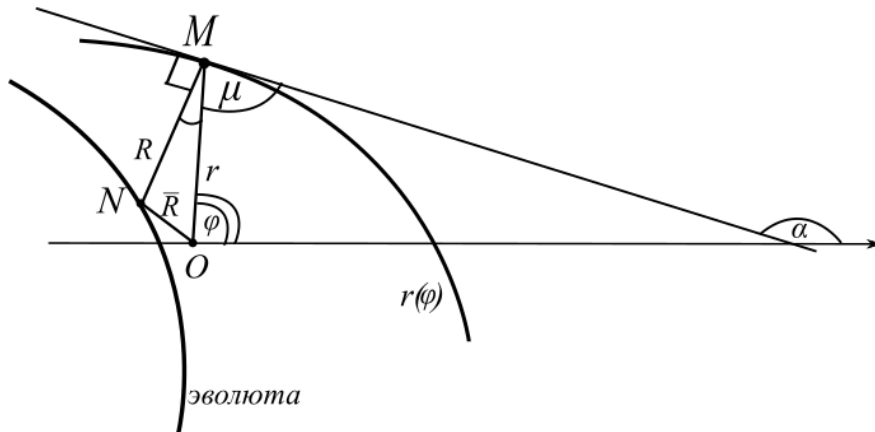


Рис. 1. В точке M кривой гладкой кривой проведены касательная и нормаль, на которой отложен отрезок $MN = R = \frac{1}{K}$, конец которого и определяет центр кривизны кривой

В [4] приведены параметрические уравнения эволюты

$$\alpha(x) = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \beta(x) = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

для кривой, заданной в декартовых координатах $y = y(x)$ и

$$\alpha(t) = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \quad \beta(t) = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}$$

для кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

В обоих случаях вывод основывается на совместном решении уравнений окружности кривизны и нормали к кривой.

В настоящем сообщении для вывода уравнения эволюты мы предложим иной, универсальный подход, позволяющий получить ее уравнение в той же форме, что и заданная кривая, избегая параметрического задания.

1. Вывод основных уравнений

Рассмотрим гладкую кривую $r = r(\varphi)$, заданную в полярной системе координат (рис. 1), где точка O — полюс системы. Угол μ между радиус-вектором r и касательной к кривой, очевидно, составляет $\mu = \alpha - \varphi$, где φ — полярный угол точки M .

Нетрудно показать [4], что

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{r'}{r}, \quad (1)$$

где $r' = \frac{dr}{d\varphi}$.

Простое применение теоремы косинусов в треугольнике $\triangle OMN$ позволяет записать, что:

$$\bar{R}^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = r^2 + R^2 - 2rR \sin \mu, \quad (2)$$

где $\bar{R}$ радиус-вектор эволюты, а R — радиус кривизны заданной кривой $r = r(\varphi)$, причем [1–4]

$$R = \frac{1}{K} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}. \quad (3)$$

Учитывая, что $\sin \mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \mu}} = \frac{r}{\sqrt{r'^2 + r^2}}$, формула (2) примет вид:

$$\bar{R}(\varphi) = \left(r^2 + \frac{(r^2 + r'^2)^3}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|^2} - \frac{2r^2(r^2 + r'^2)}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Выражение (4) и представляет собой впервые полученное уравнение эволюты в полярной системе координат. Поставляя в него уравнение кривой $r = r(\varphi)$, легко получить уравнение как самой эволюты, так и выражение для кривизны эволюты $\bar{K}$. Для получения последней мы воспользуемся выражением (3), согласно которому:

$$\bar{K} = \frac{\bar{R}^2 + 2\bar{R}'^2 - \bar{R}\bar{R}''}{(\bar{R}^2 + \bar{R}'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5)$$

В (5) числитель не взят по абсолютной величине как это принято в [1–4], поскольку в авторских работах [5–8] было показано, что для решения физических задач методом подвижного базиса, очень важно учитывать именно знак кривизны кривой.

В следующем разделе мы приведем результаты компьютерного моделирования полученных результатов (4) и (5) для хорошо известных полярных кривых: спирали Архимеда, трехлепестковой розы и кардиоиды (см. рис. 2–7). Отметим, что для простоты восприятия мы опу-

стим аналитические выражения для эволюты и ее кривизны, сделав акцент на графическом сравнении соответствующих кривых.

2. Результаты компьютерного моделирования

1. Спираль Архимеда $r(\varphi) = 4 \cdot \varphi$

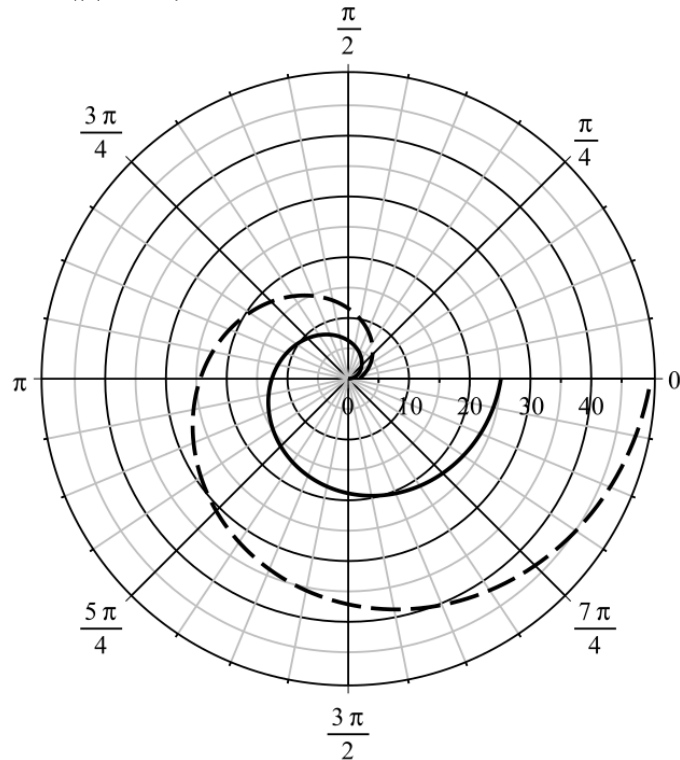


Рис. 2. Кривая $r(\varphi) = 4 \cdot \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, изображена сплошной линией, а ее эволюта $\bar{R}(\varphi)$ — пунктирной линией

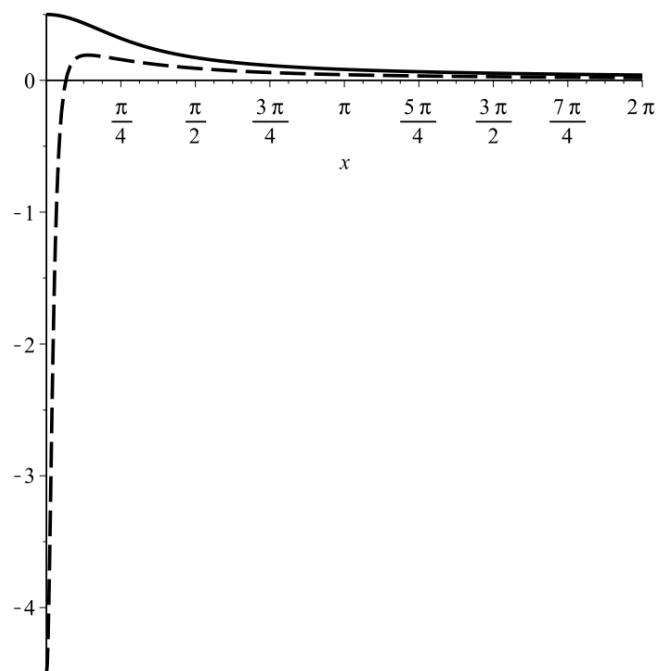


Рис. 3. Кривизна $K(\varphi)$ спирали Архимеда показана сплошной линией, а кривизна $\bar{K}(\varphi)$ ее эволюты — пунктирной линией

2. Трехлепестковая роза $r = 4 \cdot \sin(3\varphi)$

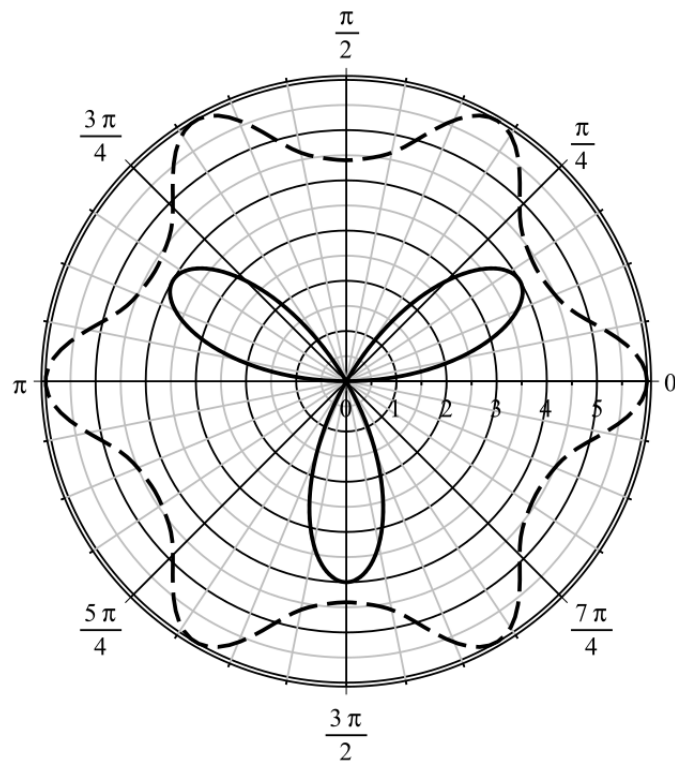


Рис. 4. Роза $r = 4 \cdot \sin(3\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, показана сплошной линией, а ее эволюта $\bar{R}(\varphi)$ — пунктирной линией

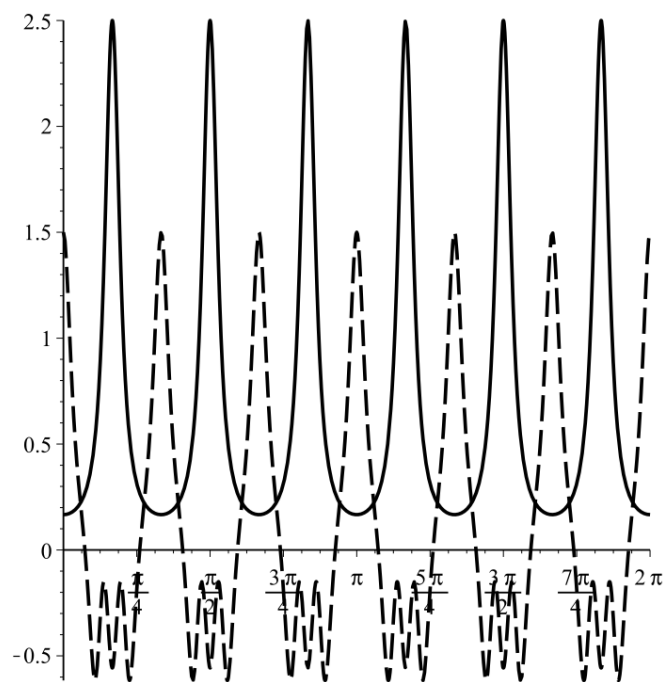


Рис. 5. Сплошной линией показана кривизна $K(\varphi)$ розы, а кривизна $\bar{K}(\varphi)$ ее эволюты — пунктирной линией

3. Кардиоида $r = 4 \cdot (1 + \cos \varphi)$

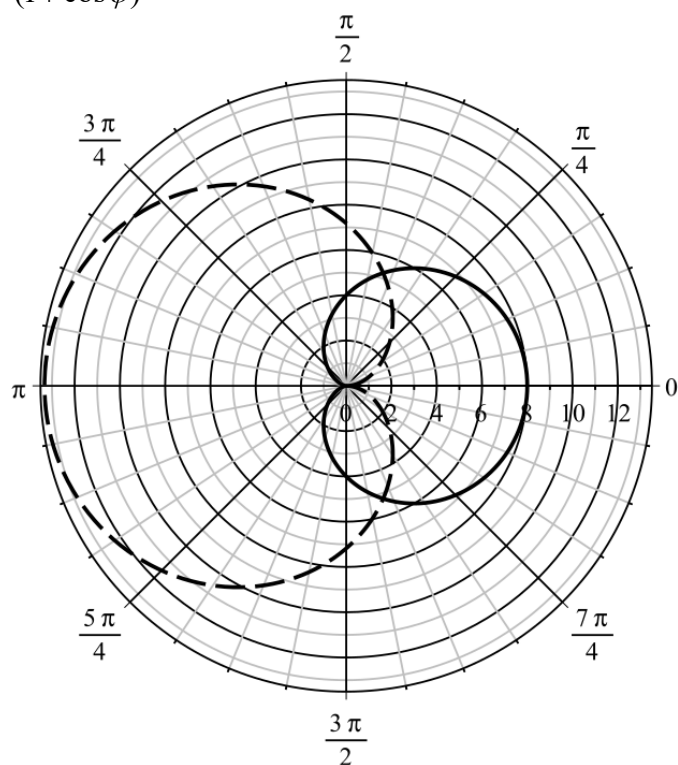


Рис. 6. Кардиоида $r = 4 \cdot (1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, изображена сплошной линией, а ее эволюта $\bar{R}(\varphi)$ — пунктирной линией

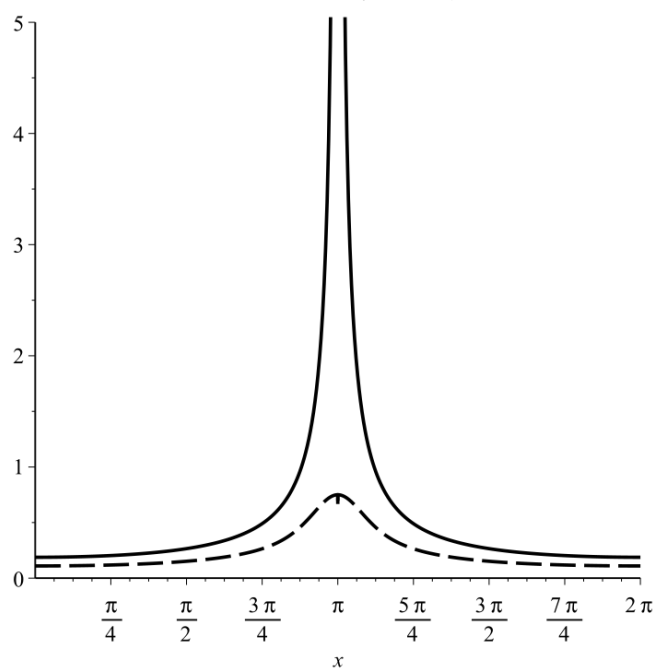


Рис. 7. Показано сравнение кривизны $K(\varphi)$ кардиоиды $r = 4 \cdot (1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, (сплошная линия) и кривизны ее эволюты $\bar{K}(\varphi)$ (пунктирная линия)

Заключение

В заключение работы отметим.

1. Найден универсальный способ составления уравнения эволюты кривой в полярных координатах, избегая параметрического задания.

2. Полученные выражения позволяют записать уравнения эволюты кривой и найти ее кривизну.
3. В качестве примеров проиллюстрированы результаты численного моделирования эволют для трех известных полярных кривых.
4. Проведенный анализ позволил привести графическое сравнение кривизны заданной кривой и кривизны ее эволюты.

Литература

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2 / В. И. Смирнов. – Москва : Физматлит, 1967. – 655 с.
2. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии / А. П. Норден. – Москва : Государственное издательство физико-математической литературы. – 1958. – 244 с.
3. Базылев В. Т. Геометрия. Т. 2 / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев. – Москва : Просвещение, 1975. – 367 с.
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1966. – 552 с.
5. Богданова С. Б. К вопросу о траектории свободно падающего тела в неинерциальных системах отсчета / С. Б. Богданова, С. О. Гладков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2023. – № 3. – С. 51–59.
6. Богданова С. Б. О физическом смысле подвижного базиса / С. Б. Богданова, С. О. Гладков // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2024 г. – С. 41–45.
7. Богданова С. Б. О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета / С. Б. Богданова, С. О. Гладков // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2023. – № 84. – С. 68–80.
8. Богданова С. Б. О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета. Часть II / С. Б. Богданова, С. О. Гладков // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2024. – № 91. – С. 51–60.

ЧЕТНОЕ, НЕЧЕТНОЕ И ПОЛНОЕ $\mathbb{J}$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕССЕЛЯ

Ю. Н. Булатов

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Аннотация. Для исследования задач с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя $B_{-\gamma}$ с отрицательным параметром $-\gamma \in (-1, 0)$ вводится интегральное преобразование на основе одного из линейно независимого решения сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma}u + u = 0$, которое выражено через функцию Бесселя первого рода с положительным параметром $\mu = (\gamma + 1)/2$. Строятся четное, нечетное и полное $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя.

Ключевые слова: сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, $\mathbb{J}$ -функции Бесселя, $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя.

Введение

Применение специального преобразования Бесселя для исследования задач для уравнений, содержащих сингулярный дифференциальный оператор Бесселя с отрицательным параметром, было предложено И. А. Киприяновым в начале 80-х годов прошлого столетия. Такого рода исследования проведены в работах [1, 2] для Δ_B -операторов вида

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}, \quad B_{\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma \in (-1, 0).$$

Стоит отметить, что в [3] исследовалась задача Коши, решение которой построено в виде ряда Фурье по функциям Бесселя $t^{\mu} J_{\mu}(x)$, где J_{μ} — функция Бесселя первого рода. Именно на этих функциях ($\mathbb{J}_{\mu}(x)$) в работе [4] введено специальное преобразование Бесселя (четное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя), которое в дальнейшем используется для ввода полного $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя. Также вводится нечетное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя, в рамках которого определен символ первой производной от четной функции.

1. Сведения, ассоциированные с оператором $B_{-\gamma}$

Отметим, что ограниченность действия оператора Бесселя обеспечена применением его к четным функциям [5]. В связи с чем введем следующее определение.

Определение 1. Функцию $f = f(x)$, определенную в полупространстве $\mathbb{R}_1^+$ будем называть четной по Киприянову, если она допускает четное продолжение по каждой координате x своего аргумента с сохранением класса функций своей принадлежности ([6, с. 21]).

$\mathbb{J}$ -функции Бесселя определены как линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя

$$B_{-\gamma}u + u = 0, \quad -1 < -\gamma < 0. \quad (1)$$

Пусть $\mu = (\gamma + 1)/2$. Фундаментальной системой решений уравнения (1) являются следующие функции [4]

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\mu}(x) &= 2^{\mu} \Gamma(1 + \mu) x^{\mu} J_{\mu}(x) = x^{2\mu} j_{\mu}(x) = x^{2\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1 + \mu)}{m! \Gamma(m + 1 + \mu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \\ \mathbb{J}_{-\mu}(x) &= 2^{-\mu} \Gamma(1 - \mu) x^{\mu} J_{-\mu}(x) = x^{2\mu} j_{-\mu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1 - \mu)}{m! \Gamma(m + 1 - \mu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \end{aligned}$$

где J_μ и $J_{-\mu}$ соответственно функции Бесселя первого рода, а j_μ и $j_{-\mu}$ — j -функции Бесселя. Как можно заметить, константа $\Gamma(1-\mu)$ для второй функции играет роль нормировочного коэффициента:

$$\mathbb{J}_{-\mu}(0) = 1.$$

Решение $\mathbb{J}_{-\mu}$ более востребовано в спектральной теории сингулярных дифференциальных уравнений, что продемонстрировано в [3]. Для первой функции это не так, т. к.

$$\mathbb{J}_\mu(0) = 0.$$

Тем не менее функция $\mathbb{J}_\mu$ определена для всех положительных μ (в отличие от $\mathbb{J}_{-\mu}$), а введенная нами константа $\Gamma(\mu+1)$ играет важную роль при построении оператора *обобщенного Т-псевдосдвига*.

2. $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя в $\mathbb{R}_n^+$

В статье [4] (см. Теорему 4.) доказана обратимость на четных функциях $(x^2)^{-\gamma/2} f(x) \in L_2(\mathbb{R}_1^+)$ следующих интегральных преобразований:

$$\mathbb{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(\xi y) f(y) y^{-\gamma} dy, \quad \mathbb{F}^{-1}[f](x) = C_\mu \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(\xi x) \hat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi,$$

которые названы *прямым и обратным $\mathbb{J}$ -преобразованиями Бесселя*.

Многомерное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя имеет своим ядром произведение $\mathbb{J}_\mu$ -функций Бесселя:

$$\mathbb{J}_\mu(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n^+,$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ — мультииндекс, каждая координата которого связана с параметром $-\gamma_i$ сингулярного дифференциального оператора Бесселя $B_{-\gamma_i}$ равенством $\mu_i = \frac{\gamma_i + 1}{2}$, $\gamma_i \in (0, 1)$, $\mu_i \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$. Введем сингулярный дифференциальный оператор

$$\left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i} \right)_x = \begin{cases} B_{-\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \text{если } \alpha_i = 2k \\ \frac{\partial}{\partial x_i} B_{-\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \text{если } \alpha_i = 2k + 1 \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2.1. Рекуррентное соотношение для производных $\mathbb{J}$ -функции Бесселя

Лемма 1. Пусть $2\mu_i = \gamma_i + 1$, $-\gamma_i \in (-1, 0)$. Имеют место следующие формулы

$$\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i x_i \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i),$$

$$\nabla \mathbb{J}_\mu(x) = 2 \left(\mu_1 x_1 \mathbb{J}_{\mu_1-1}(x_1), \dots, \mu_n x_n \mathbb{J}_{\mu_n-1}(x_n) \right).$$

Доказательство. Исходим из определения $\mathbb{J}_\mu(x) = x^{2k} j_\mu(x)$. Имеем

$$j_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(k+\mu+1)} \frac{t^{2k}}{2^{2k}},$$

тогда

$$\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i) = x_i^{2\mu_i} j_{\mu_i}(x_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu_i+1)}{\Gamma(k+\mu_i+1)} \frac{x_i^{2(k+\mu_i)}}{2^{2k}}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i)}{\partial x_i} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu_i+1) 2(k+\mu_i)}{(k+\mu_i)\Gamma(k+\mu_i)} \frac{x_i^{2(k+\mu_i)-1}}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu_i+1)}{\Gamma(k+[\mu_i-1]+1)} \frac{x_i^{2(k+\mu_i)-1}}{2^{2k-1}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\mu_i \Gamma(\mu_i)}{\Gamma(k+[\mu_i-1]+1)} \left(\frac{x_i}{2}\right)^{2k} 2 x_i^{2\mu_i-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu_i-1+1)}{\Gamma(k+\mu_i-1+1)} \left(\frac{x_i}{2}\right)^{2k} 2\mu_i x_i^{2\mu_i-1} = \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma([\mu_i-1]+1)}{\Gamma(k+[\mu_i-1]+1)} \left(\frac{x_i}{2}\right)^{2k} \right] 2\mu_i x_i^{2(\mu_i-2)} x_i = 2\mu_i x_i j_{\mu_i-1}(x_i) x_i^{2(\mu_i-1)} = 2\mu_i x_i \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Следствие 1.

$$\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i \xi_i^2 x_i \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i \xi_i).$$

Доказательство с очевидностью вытекает из леммы 1.

2. Четное, нечетное и полное $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя

$\mathbb{J}$ -Преобразования Бесселя на основе $\mathbb{J}$ -функций Бесселя введены в работе [4]. В общем случае: *четным прямым и четным обратным $\mathbb{J}$ -преобразованиями Бесселя* будем называть выражения

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{ev}[f](\xi) &= \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n} f(y) \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi_i y_i) y_i^{-\gamma_i} dy_i, \\ \mathbb{F}_{ev}^{-1}[f](\xi) &= C(\mu) \int_{\mathbb{R}_n} \hat{f}(\xi) \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi_i x_i) \xi_i^{-\gamma_i} d\xi_i, \quad C(\mu) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2^{\mu_i} \Gamma(\mu_i+1)} \right)^2. \end{aligned}$$

Следуя статье [7] и следствию 1, введем *нечетное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя*, основанное на функции

$$\frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i \xi_i x_i \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i \xi_i),$$

которое имеет вид

$$\mathbb{F}_{od}[f](\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \prod_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} dx_i.$$

Несобственный интеграл здесь, как обычно, понимается в смысле главного значения по Коши. Как видим, ядро этого преобразования нечетно, поэтому для четных функций

$$\mathbb{F}_{od}[f](\xi) = 0.$$

Лемма 2. Пусть f четная функция из пространства основных функций Л. Шварца. Тогда

$$\mathbb{F}_{od} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] (\xi) = \xi_i \mathbb{F}_{ev}[f](\xi) = \xi_i \hat{f}(\xi), \quad (2)$$

где $\hat{f}(\xi)$ — четное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{od} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] (\xi) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} dx_i = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} dx_i = \int_0^{\infty} f(x) \frac{x_i^{\gamma_i}}{\xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} \right) x_i^{-\gamma_i} dx_i. \end{aligned}$$

Поскольку

$$x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} \right) = B_{-\gamma_i} \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i),$$

то

$$\mathbb{F}_{od} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] (\xi) = \int_0^\infty f(x_i) \frac{1}{\xi_i} B_{-\gamma_i} \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i) x_i^{-\gamma_i} dx_i.$$

Согласно равенству (1), получим

$$\mathbb{F}_{od} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] (\xi) = \xi_i \int_0^\infty f(x_i) \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i) x_i^{-\gamma_i} dx_i = \xi_i \mathbb{F}_{ev}[f](\xi) = \xi_i \hat{f}(\xi).$$

Доказательство закончено.

Из равенства (2) видно, что преобразование $\mathbb{F}_{od}$ производной четной функции свелось к преобразованию $\mathbb{F}_{ev}$. Поэтому удобно ввести одно преобразование со смешанным ядром

$$\mathbf{J}_\mu(x\xi) = \mathbb{J}_\mu(x\xi) + \psi \mathbb{J}_{\mu-1}(x\xi), \quad \psi = 2 \prod_{i=1}^n \mu_i x_i \xi_i.$$

При этом, полагая $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f_{ev}(x) + f_{od}(x)$, получим

$$\mathbf{F}[f](\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \mathbf{J}_\mu(x\xi) x^{-\gamma} dx = \mathbb{F}_{ev}[f_{ev}](\xi) + \mathbb{F}_{od}[f_{od}](\xi),$$

где первое слагаемое представляет собой четное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя, а второе нечетное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя.

Теорема 1 (о символе $D_{B_{-\gamma}}^\alpha$ -оператора). Для $f \in S(\mathbb{R}_n)$ имеет место формула

$$\mathbf{F}[D_{B_{-\gamma}}^{\alpha_i} f](\xi) = \begin{cases} (-\xi_i^2)^k \hat{f}(\xi), & \text{если } \alpha = 2k \\ (-\xi_i^2)^k \xi_i \hat{f}(\xi), & \text{если } \alpha = 2k + 1 \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Предположим, что функция f четная по Киприянову и число $\alpha = 2k \geq 0$ — четное. Тогда

$$\mathbf{F}[D_{B_{-\gamma}}^{\alpha_i} f](\xi) = \mathbb{F}_{ev} [B_{-\gamma_i}^k f](\xi) = (-\xi_i^2)^k \hat{f}(\xi), \quad (3)$$

что уже было доказано в выше.

Пусть теперь $\alpha = 2k + 1$ — нечетное число. Тогда, воспользовавшись леммой 2 и равенством (3), получим

$$\mathbf{F}[D_{B_{-\gamma}}^{\alpha_i} f](\xi) = \xi_i \mathbb{F}_{ev} [B_{-\gamma_i}^k f](\xi) = (-\xi_i^2)^k \xi_i \hat{f}(\xi). \quad (4)$$

Из (4) и (3) следует равенство теоремы 1.

Доказательство закончено.

Заключение

Для исследования задач с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя $B_{-\gamma}$ с отрицательным параметром $-\gamma \in (-1, 0)$ были введены многомерные интегральные четное, нечетное и полное $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя. Данные преобразования были построены на основе одного из линейно независимых решений сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma}u + u = 0$.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

Литература

1. Ляхов Л. Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 12. – С. 1610–1620.
2. Ляхов Л. Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, № 4. – С. 517–528.
3. Сабитов К. Б. Начальная задача для В-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода / К. Б. Сабитов, Н. В. Зайцева // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 123–135.
4. Ляхов Л. Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова / Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 12. – С. 1654–1665.
5. Левитан, Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б. М. Левитан // УМН. – 1951. – Т. 6, № 2. – С. 102–143.
6. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. – М. : Наука, 1997. – 204 с.
7. Киприянов И. А. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / И. А. Киприянов, В. В. Катрахов // Математический сборник. – 1977. – Т. 104, № 1. – С. 49–68.

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНО МУЛЬТИСТАБИЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С КОНТИНУУМОМ СОСУЩЕСТВУЮЩИХ СКРЫТЫХ ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ

И. М. Буркин

Тульский государственный университет

Аннотация. На основе трехмерной системы, обладающей единственным скрытым хаотическим аттрактором размерности «почти 3», бассейном притяжения которого является почти все фазовое пространство, построена экстремально мультистабильная система четвертого порядка. Построенная система содержит континуум сосуществующих скрытых хаотических и периодических аттракторов. Такого эффекта удастся добиться за счет того, что смещение аттрактора в фазовом пространстве осуществляется только за счет выбора его начального условия. Столь сложная структура фазового пространства сконструированной системы открывает широкие возможности для ее использования, например, для скрытия передаваемой информации при организации защищенной связи в системах коммуникаций.

Ключевые слова: динамическая система, экстремальная мультистабильность, континуум хаотических аттракторов, показатели Ляпунова, размерность Каплана — Йорке.

Введение

В последние два десятилетия системы, демонстрирующие хаотическое поведение, привлекли пристальное внимание исследователей. Такие системы генерируют хаотический сигнал или последовательность таких сигналов и открывают широкие возможности для приложений на основе хаоса. Детерминированная псевдослучайность и непредсказуемость хаоса нашли широкое применение в генерировании псевдослучайных чисел [1], криптографии [2], робототехнике [3] и защищенной связи [4–6]. Среди тем, связанных с хаосом, особый интерес представляет мультистабильность или сосуществование нескольких динамических состояний в системе. Мультистабильные хаотические системы помимо желаемого хаотического решения могут производить множество других решений при различных начальных условиях. Такая комплексная система может применяться в различных ситуациях без изменения базовой структуры, и обеспечивает большое удобство для инженеров. В частности, бесконечное число хаотических режимов динамической системы порождает чрезвычайную неопределенность и непредсказуемость. С другой стороны, мультистабильность может представлять некоторые угрозы по той же причине. Упомянутые обстоятельства вызвали большую волну как исследований феномена мультистабильности, так и разработку методов искусственного конструирования мультистабильных систем [7–11]. Для конструирования экстремально мультистабильных хаотических систем, то есть систем, содержащих бесконечное число сосуществующих хаотических аттракторов, было разработано несколько различных подходов. Например, рассмотреть существующую хаотическую систему и изменить ее, добавив дополнительные члены в дифференциальные уравнения, описывающие систему [7], или модифицировать существующий член [8–11], или добавить новые состояния в систему и изменить её порядок, добавив в систему мемристор [12]. Целью всех упомянутых приемов генерирования экстремально мультистабильных систем было построение системы, в которой реализуется эффект усиления смещения (offset boosting). Усиление смещения означает, что существующий в системе аттрактор перемещается в фазовом пространстве в любом направлении.

Оказалось, что эффекта усиления смещения можно добиться и другим способом, отличным от способов, упомянутых выше. В работе [13] была продемонстрирована возможность

построения системы, обладающей бесконечным числом сосуществующих аттракторов, путем специального расширения размерности существующей системы, имеющей нетривиальный аттрактор. В построенной таким образом системе смещение аттрактора в фазовом пространстве осуществляется только за счет выбора начального условия, что обеспечивает существование континуума сосуществующих аттракторов.

1. Расширение размерности системы для воспроизведения аттракторов

В работе [11] построена система третьего порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - y \cdot \arctg(50z), \\ \dot{z} &= y^4 - \frac{a}{1+x^8}.\end{aligned}\quad (1)$$

Эта система не имеет состояний равновесия и содержит скрытый мультифрактальный аттрактор, размерность Каплана — Йорке которого «почти 3». Бассейном притяжения этого аттрактора является почти все фазовое пространство, за исключением аналитического решения системы $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$, $z(t) = z(0) - at$.

Пользуясь идеей специального расширения размерности пространства, на основе этой системы сконструируем систему 4-го порядка так, чтобы она обладала континуумом сосуществующих аттракторов. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -b(x-u) - y \arctg(50z), \\ \dot{z} &= y^4 - \frac{a}{1+(x-u)^8}, \\ \dot{u} &= cy.\end{aligned}\quad (2)$$

Если в системе (2) произвести замену $x \rightarrow (-x)$, $y \rightarrow (-y)$, $u \rightarrow (-u)$, то система не изменится. Поэтому вместе с любым аттрактором системы существует центрально-симметричный ему аттрактор в проекциях на плоскости (x, y) , (x, u) , (y, u) , а также пара симметричных аттракторов в проекциях на плоскости (x, z) и (y, z) . Кроме того очевидно, что проекция любого аттрактора на плоскость (x, u) есть отрезок прямой, и система (2) содержит континуум аналитических решений $x(t) \equiv y(t) \equiv d$, $z(t) = z(0) - at$, $d \in (-\infty, \infty)$.

Система (2) примечательна тем, что вместе с решением с начальным условием (x_0, y_0, z_0, u_0) она имеет и решение с начальным условием $(x_0 + d, y_0, z_0, u_0 + d)$ для любого d , поскольку замена $x \rightarrow x + d$, $u \rightarrow u + d$ не меняет динамику системы. Если рассматриваемая система имеет нетривиальный аттрактор, то она имеет континуум аттракторов, поскольку аттрактор системы определяется только начальным условием.

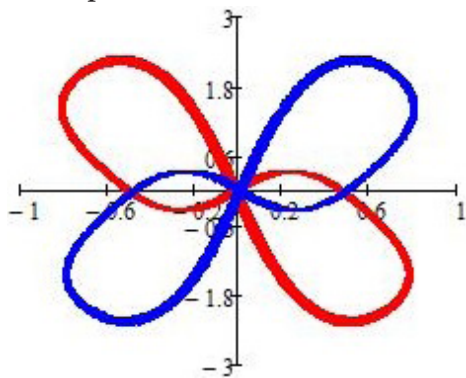


Рис. 1

Выберем следующие значения параметров системы $a = 2$, $b = 2.3$, $c = 0.1$. Исчерпывающий компьютерный поиск позволил найти пару аттракторов (циклов) системы (2) с начальными условиями $(\pm 0.7947; \mp 0.0326; -1.4305; \pm 0.0791)$ (рис. 1; проекция на плоскость (x, z)).

Теперь проинтегрируем систему (2), увеличив первую и последнюю координаты начальных условий, например, на ± 0.7 . Новые начальные условия:

$$(\pm 0.7947 \pm 0.7; \mp 0.0326; -1.4305; \pm 0.0791 \pm 0.7). \quad (3)$$

При интегрировании системы с начальными условиями (3) появляются еще две пары циклов, полученных сдви-

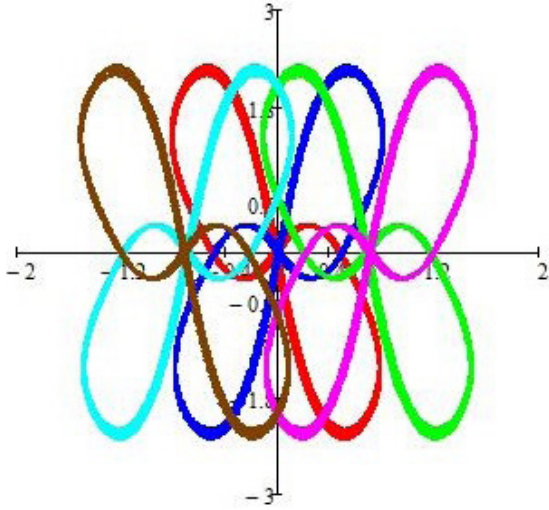


Рис. 2

На рис. 4 — проекция на ту же плоскость семейства аттракторов, визуализированных при интегрировании с начальными условиями $(2,1,1,2)$, $(6,1,1,6)$, $(-2,1,1,-2)$, $(-6,1,1,-6)$.

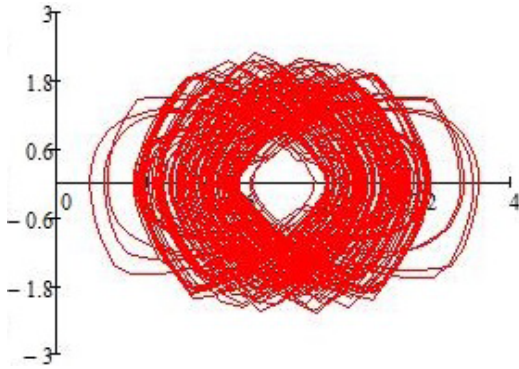


Рис. 3

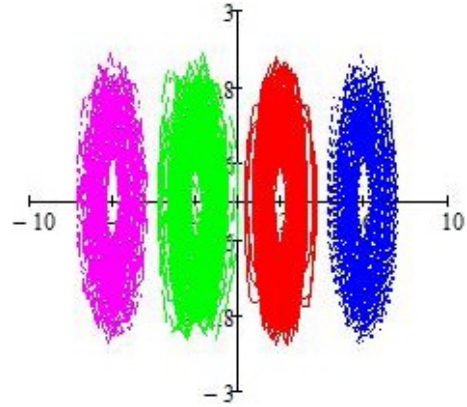


Рис. 4

Отметим, что система (2) не имеет состояний равновесия, поэтому все ее аттракторы являются скрытыми [11]. Семейства аттракторов, представленных на рис. 2 и 4, будем называть 1-D полосой аттракторов.

2. Система с 2-D решеткой скрытых хаотических аттракторов

Система (2) является смещаемой по переменной y (variable-boostable system [10]). Последнее обстоятельство позволяет заменить в системе (2) переменную y на периодическую функцию этой переменной так, чтобы новая система обладала 2-D решеткой сосуществующих аттракторов. Эта решетка будет представлять собой объединение счетного числа 1-D полос, каждая из которых содержит континуум сосуществующих аттракторов, аналогичных аттракторам, представленным на рис. 2 и 4. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \operatorname{tg} \frac{y}{2}, \\ \dot{y} &= -b(x-u) - \operatorname{tg} \frac{y}{2} \cdot \operatorname{arctg}(50z), \\ \dot{z} &= \left(\operatorname{tg} \frac{y}{2} \right)^4 - \frac{2}{1+(x-u)^8}, \\ \dot{u} &= c \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Легко убедиться, что циклы системы (2) также являются циклами системы (4). В то же время, как показано в [10], эта система также содержит циклы, например, с начальными условиями $(\pm 0.7947 \pm 0.7; \mp 0.0326 + 2\pi k; -1.4305; \pm 0.0791 \pm 0.7)$, то есть она содержит счетное число полос, каждая из которых в свою очередь содержит континуум скрытых циклов. Система (4), кроме того, содержит счетное число полос скрытых хаотических аттракторов. Продемонстрируем на примере феномен самовоспроизведения системой (4) 2-D решетки, состоящей из полос, каждая из которых содержит континуум хаотических аттракторов.

Зададимся начальным условием $(1, 1, 0, 1)$. Численное интегрирование системы (4) с таким начальным условием выводит нас на хаотический аттрактор, представленный на рис. 5 (проекция на плоскость (y, u)).

Показатели Ляпунова и размерность D_{KY} Каплана — Йорке этого аттрактора следующие: $\Lambda_1 = 0.215$, $\Lambda_2 = -0.009$, $\Lambda_3 = -0.011$, $\Lambda_4 = -0.235$, $D_{KY} = 3.831$. На рис. 6 представлен фрагмент 2-D решетки хаотических аттракторов системы (4), полученный «размножением» аттрактора, представленного на рис. 5. Эти аттракторы визуализированы путем интегрирования с системы с начальными условиями $(1, 2\pi + 1, 0, 1)$; $(1.5, 1, 0, 1.5)$; $(0.5, 1, 0, 0.5)$; $(1.5, 2\pi + 1, 0, 1.5)$; $(0.5, 2\pi + 1, 0, 0.5)$ (проекция на плоскость (y, u)).

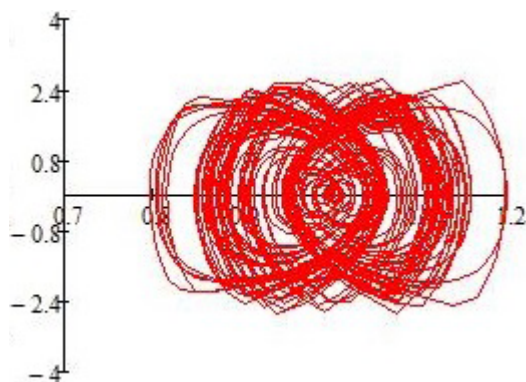


Рис. 5

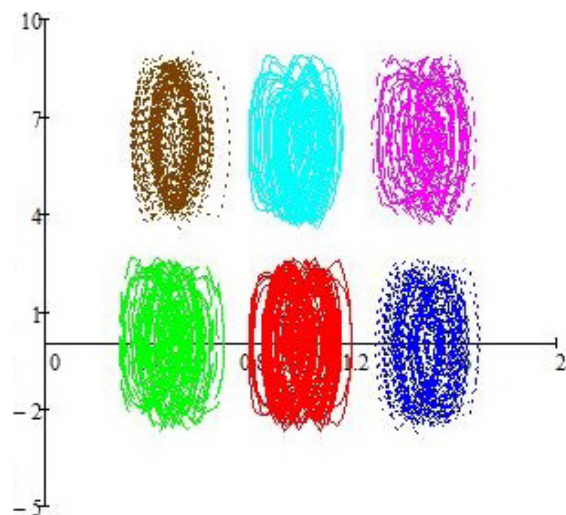


Рис. 6

Заключение

На основе трехмерной системы, обладающей хаотическим аттрактором размерности «почти 3», построена система четвертого порядка, содержащая континуум сосуществующих скрытых периодических и хаотических аттракторов. Такого эффекта удастся добиться за счет того, что смещение аттрактора в фазовом пространстве осуществляется только за счет выбора начального условия. Континуум сосуществующих хаотических режимов динамической системы порождает чрезвычайную неопределенность и непредсказуемость. Последнее обстоятельство открывает, например, широкие возможности для использования такой системы для скрытия передаваемой информации при организации защищенной связи в системах коммуникаций.

Литература

1. Peng H. Design of pseudorandom number generator based on a controllable multi-double-scroll chaotic system / M. Jié, X. Du [et al.] // Chaos Solitons Fractals. – 2023. – Vol.174:113803.
2. Singh A. K. An image security model based on chaos and DNA cryptography for IIoT images / A. K. Singh, K. Chatterjee, A. Singh // IEEE Trans. Industr. Inf. – 2022. – Vol. 19, № 2. – P. 1957–1964.

3. *Petavratzis E.* Experimental study of terrain coverage of an autonomous chaotic mobile robot / E. Petavratzis, C. Volos, I. Stouboulos // *Integration*. – 2023. – Vol. 90. – P. 104–114.
4. *Li H.* Two-Dimensional Memristive Hyperchaotic Maps and Application in Secure Communication / H. Li, Z. Hua, H. Bao, L. Zhu, M. Chen and B. Bao // *EEE Transactions on Industrial Electronics*. – 2021. – Vol. 68, № 10. – P. 9931–9940.
5. *Zhong Q.* High-security UPMC optical transmission system of seven-core fiber based on updating the 3D discrete chaotic model / Q. Zhong, R. Jianxin [et al.] // *Opt. Lett.* – 2022. – Vol. 47. – P. 2254–2257.
6. *Kamdoum Tamba V.* Hidden extreme multistability in a smooth flux-controlled memristor based four-dimensional chaotic system and its application in image encryption / V. Kamdoun Tamba, A. L. Mbanda Biamou [et al.] // *Phys. Scr.* – 2024. – Vol. 99, № 2. – 025210.
7. *Sprott J. C.* Megastability: Coexistence of a countable infinity of nested attractors in a periodically-forced oscillator with spatially-periodic damping / J. C. Sprott, S. Jafari [et al.] // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* – 2017. – Vol. 226. – P. 1979–1985.
8. *Burkin I. M.* On some methods for generating extremely multistable systems / I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – 1368(4):042050.
9. *Буркин И. М.* Генерирование экстремально мультистабильных систем на основе систем в форме Лурье / И. М., Буркин, О. И. Кузнецова // *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*. – 2019. – Т. 6(64), № 4. – С. 555–564.
10. *Буркин И. М.* Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов / И. М. Буркин, О. И. Кузнецова // *Чебышевский сборник*. – 2021. – Т. 22, № 1. – С. 105–117.
11. *Буркин И. М.* Новая мегастабильная система с 2-D полосой скрытых аттракторов и аналитическими решениями / И. М. Буркин, О. И. Кузнецова // *Чебышевский сборник*. – 2021. – Т. 22, № 4. – С. 360–368.
12. *Zhang S.* Generating Any Number of Diversified Hidden Attractors via Memristor Coupling / S. Zhang, C. Li, J. Zheng [et al.] // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*. – 2021. – Vol. 68, № 12. – P. 4945–4956.
13. *Chunbiao L.* Offset parameter cancellation produces countless coexisting attractors / L. Chunbiao, L. Tengfei, L. Zuohua // *Chaos*. – 2022. – Vol. 32:121104.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕЙКОЗА. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СЕТОК

Д. С. Верёвкина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается система уравнений для решения системы линейных алгебраических уравнений методом сеток (метод конечных разностей), а также с помощью матрицы. Конечно-разностные уравнения получают путем замены производных в исходном дифференциальном уравнении соответствующими конечно-разностными выражениями. Конечно-разностные выражения для какой-либо частной производной можно получить из разложения функции в ряд Тейлора по соответствующей переменной.

Ключевые слова: лейкоз, обыкновенные дифференциальные уравнения, решение СЛАУ методом конечных разностей, задача Коши.

Введение

Математическую модель лейкоза разработали, опираясь на последние данные о процессах кроветворения у млекопитающих. В этой инновационной модели учитываются три вида клеток, включая лейкозные, и их взаимодействие анализируется как конкуренция за функциональное пространство для клеточного деления.

Лейкозные клетки определяются как те, которые размножаются с более высокой скоростью по сравнению с остальными. Математическая формализация представлена задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Нарушение процессов кроветворения связано с изменением ключевого параметра, переводящего систему из стабильного стационарного состояния в нестабильное.

Исследование математической модели лейкоза может пролить свет на уникальные аспекты заболевания в различных регионах, учитывая генетические, социокультурные и другие факторы, влияющие на его развитие и характер.

Результаты исследования предоставят новые стратегии лечения, адаптированные к особенностям конкретной популяции, что крайне важно для персонализированной медицины и улучшения результатов лечения у пациентов с лейкозом.

Основой данной работы является статья, посвященная математической модели лейкоза [2].

Математическая модель лейкоза

Предлагаемые в литературных источниках математические модели [9, 10], представлены системами обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах [11, 12] предлагается модель иммунного отклика на появление лейкозных клеток, а в [13] предлагаются варианты моделирования лечения лейкозов. Уровень заболеваний населения РФ заболеваниями крови отражен в [14]. За основу моделирования лейкоза взята концепция конкуренции всех типов клеток за функциональное пространство [15].

Количество стволовых клеток — u_s , здоровых — u_h , лейкозных — u_d , клетки микроокружения — u_a . Удельные скорости равные — $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$. α — скорость появления новых клеток, γ — параметр интенсивности ингибирования, β — параметр соответствует количеству стволовых клеток. Скорость перехода здоровых клеток — ν_1, ν_2 .

В работе [2], представлена математическая модель лейкоза в виде задачи Коши для системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_h}{dt} = \mu_1(1 - u_h - u_d - u_s)u_h + \alpha\gamma u_d u_s - \nu_1 u_h, \quad (1)$$

$$\frac{du_d}{dt} = \mu_2(1 - u_h - u_d - u_s)u_h + (1 - \alpha)u_d u_s - \nu_2 u_d, \quad (2)$$

$$\frac{du_s}{dt} = \mu_3(1 - u_h - u_d - u_s)u_h^2 - u_s u_d, \quad (3)$$

$$\frac{du_a}{dt} = -\mu_4 u_a (\beta - u_s), \quad (4)$$

$$u_h(t=0) = u_h^0, \quad u_d(t=0) = u_d^0, \quad u_s(t=0) = u_s^0, \quad u_a(t=0) = u_a^0. \quad (5)$$

Построение разностной схемы

Будем считать, что система уравнений (1)–(4) с начальными условиями (5) решается на промежутке от $[t_0; T]$. Введем на отрезке от $[0; T]$ сетку $t_j = hj$, где j принадлежит от $[0; N]$.

Пусть $u_h = y_{hj}$, $u_d = y_{dj}$, $u_s = y_{sj}$, $u_a = y_{aj}$ [3–7].

Для приближенного решения рассматриваемой задачи Коши, проведем стандартную аппроксимацию в производных, входящих в уравнение (1).

Производная первого порядка будет аппроксимироваться разностным соотношением $\frac{y_{hj} - y_{hj-1}}{\tau}$.

Правую часть каждого из уравнений аппроксимируем линейной комбинацией произведений выражения на предыдущим временном слое и на текущем.

Уравнение системы (1) заменится следующим алгебраическим уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{y_{hj} - y_{hj-1}}{\tau} = & \eta(\mu_1(1 - y_{hj-1} - y_{dj-1} - y_{sj-1})y_{hj} + \alpha\gamma y_{aj-1}y_{sj-1} - \nu_1 y_{hj-1}) + \\ & + (1 - \eta)(\mu_1(1 - y_{hj} - y_{dj} - y_{sj})y_{hj-1} + \alpha\gamma y_{aj}y_{sj} - \nu_1 y_{hj}), \end{aligned}$$

где η и $(1 - \eta)$ параметр, который мы будем подбирать, чтобы добиться экспериментальным путем наибольшей точности.

Такое представление правой части нацелено на то, чтобы уравнение стало линейным.

Для дальнейшего удобства введем следующие обозначения: $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}, \omega_1$.

$$\xi_{11} = \frac{1}{\tau} - \eta\mu_1(1 - y_{hj-1} - y_{dj-1} - y_{sj-1}) + (1 - \eta)\nu_1 + (1 - \eta)\mu_1 y_{hj-1},$$

$$\xi_{12} = (1 - \eta)\mu_1 y_{hj-1},$$

$$\xi_{13} = -\eta\alpha\gamma y_{aj-1} - \eta\alpha\gamma y_{aj-1} + (1 - \eta)\mu_1 y_{hj-1},$$

$$\xi_{14} = -(1 - \eta)\alpha\gamma y_{sj-1},$$

$$\omega_1 = \frac{y_{hj-1}}{\tau} + (1 - \eta)\mu_1 y_{hj-1};$$

Аналогично поступим с остальными уравнениями системы.

Разностное соотношение для уравнения (2): $\frac{y_{dj} - y_{dj-1}}{\tau}$.

Уравнение системы (2) заменится следующим алгебраическим уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{y_{dj} - y_{dj-1}}{\tau} = & \eta(\mu_2(1 - y_{hj-1} - y_{dj-1} - y_{sj-1})y_{hj} + (1 - \alpha)\gamma y_{aj}y_{sj-1} - \nu_2 y_{dj-1}) + \\ & + (1 - \eta)(\mu_2(1 - y_{hj} - y_{dj} - y_{sj})y_{hj-1} + (1 - \alpha)\gamma y_{aj}y_{sj} - \nu_2 y_{dj}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{y_{dj}}{\tau} - \frac{y_{dj-1}}{\tau} - \eta(\mu_2(1 - y_{hj-1} - y_{dj-1} - y_{sj-1}))y_{hj} + (1 - \alpha)\gamma y_{aj}y_{sj-1} - \nu_2 y_{dj-1}) - \\
& - (1 - \eta)(\mu_2(1 - y_{hj} - y_{dj} - y_{sj}))y_{hj-1} + (1 - \alpha)\gamma y_{aj}y_{sj} - \nu_2 y_{dj}) = 0, \\
& \frac{y_{dj}}{\tau} - \frac{y_{dj-1}}{\tau} - \eta(\mu_2(y_{hj} - y_{hj}y_{hj-1} - y_{hj}y_{dj-1} - y_{hj}y_{sj-1})) + (1 - \alpha)\gamma y_{aj}y_{sj-1} - \nu_2 y_{dj-1}) - \\
& - (1 - \eta)(\mu_2(y_{hj-1} - y_{hj-1}y_{hj} - y_{hj-1}y_{dj} - y_{hj-1}y_{sj})) + (1 - \alpha)\gamma y_{aj}y_{sj} - \nu_2 y_{dj}) = 0, \\
& \xi_{21} = -\eta(\mu_2(1 - y_{hj-1} - y_{dj-1} - y_{sj-1})) - (1 - \eta)(\mu_2(-y_{hj-1})), \\
& \xi_{22} = \frac{1}{\tau} - (1 - \eta)(\mu_2(-y_{hj-1}) - \nu_2), \\
& \xi_{23} = -(1 - \eta)(\mu_2(-y_{hj-1}) + (1 - \alpha)\gamma y_{aj-1}), \\
& \xi_{24} = -\eta(1 - \alpha)\gamma y_{sj-1}, \\
& \omega_2 = -\frac{y_{dj-1}}{\tau} - \eta(-\nu_2 y_{dj-1}) - (1 - \eta)(\mu_2(y_{hj-1}));
\end{aligned}$$

Разностное соотношение для уравнения (3): $\frac{y_{sj} - y_{sj-1}}{\tau}$.

Уравнение системы (3) заменится:

$$\begin{aligned}
& \frac{y_{sj} - y_{sj-1}}{\tau} = \eta(\mu_3(1 - y_{hj-1} - y_{dj-1} - y_{sj-1}))y_{hj-1}y_{hj-1} - \gamma y_{sj-1}y_{aj}) + \\
& + (1 - \eta)(\mu_3(1 - y_{hj} - y_{dj} - y_{sj}))y_{hj-1}y_{hj-1} - \gamma y_{sj}y_{aj-1}), \\
& \frac{y_{sj}}{\tau} - \frac{y_{sj-1}}{\tau} - \eta(\mu_3(1 - y_{hj-1} - y_{dj-1} - y_{sj-1}))y_{hj-1}y_{hj-1} - \gamma y_{sj-1}y_{aj}) - \\
& - (1 - \eta)(\mu_3(1 - y_{hj} - y_{dj} - y_{sj}))y_{hj-1}y_{hj-1} - \gamma y_{sj}y_{aj-1}) = 0, \\
& \frac{y_{sj}}{\tau} - \frac{y_{sj-1}}{\tau} - \eta(\mu_3(y_{hj-1}y_{hj-1} - y_{hj-1}y_{hj-1}y_{hj-1} - y_{hj-1}y_{hj-1}y_{dj-1} - y_{hj-1}y_{hj-1}y_{sj-1})) - \\
& - \gamma y_{sj-1}y_{aj}) - (1 - \eta)(\mu_3(y_{hj-1}y_{hj-1} - y_{hj-1}y_{hj-1}y_{hj} - y_{hj-1}y_{hj-1}y_{dj} - y_{hj-1}y_{hj-1}y_{sj}))y_{hj-1}y_{hj-1} - \gamma y_{sj}y_{aj-1}) = 0, \\
& \xi_{31} = -(1 - \eta)(\mu_3(-y_{hj-1}y_{hj-1})), \\
& \xi_{32} = -(1 - \eta)(\mu_3(-y_{hj-1}y_{hj-1})), \\
& \xi_{33} = \frac{1}{\tau} - (1 - \eta)(\mu_3(-y_{hj-1}y_{hj-1}) - \gamma y_{aj-1}), \\
& \xi_{34} = -\eta(-\gamma y_{sj-1}); \\
& \omega_3 = -\frac{y_{sj-1}}{\tau} - \eta(\mu_3(y_{hj-1}y_{hj-1} - y_{hj-1}y_{hj-1}y_{hj-1} - y_{hj-1}y_{hj-1}y_{dj-1} - y_{hj-1}y_{hj-1}y_{sj-1})) - (1 - \eta)(\mu_3(-y_{hj-1}y_{hj-1}));
\end{aligned}$$

Разностное соотношение для уравнения (4): $\frac{y_{aj} - y_{aj-1}}{\tau}$.

Уравнение системы (4) заменится:

$$\begin{aligned}
& \frac{y_{aj} - y_{aj-1}}{\tau} = \eta(-\mu_4(y_{aj-1}(\beta - y_{sj}))) + (1 - \eta)(-\mu_4(y_{aj}(\beta - y_{sj-1}))), \\
& \frac{y_{aj}}{\tau} - \frac{y_{aj-1}}{\tau} - \eta(-\mu_4(y_{aj-1}(\beta - y_{sj}))) - (1 - \eta)(-\mu_4(y_{aj}(\beta - y_{sj-1}))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{41} &= 0, \\
\xi_{42} &= 0, \\
\xi_{43} &= -\eta \left(-\mu_4 \left(y_{aj} (-1) \right) \right), \\
\xi_{44} &= \frac{1}{\tau} - (1 - \eta) \left(-\mu_4 \left(1 \left(\beta - y_{sj-1} \right) \right) \right), \\
\omega_4 &= \frac{y_{aj-1}}{\tau} - \eta \left(-\mu_4 \left(y_{aj-1} (\beta) \right) \right);
\end{aligned}$$

Таким образом, для каждого фиксированного значения j мы получаем систему из четырех линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с четырьмя неизвестными. Решая эту систему для каждого j мы получаем 4 набора значений неизвестных функций в точках сетки [1].

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & \xi_{14} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} & \xi_{24} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} & \xi_{34} \\ \xi_{41} & \xi_{42} & \xi_{43} & \xi_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{hj} \\ y_{dj} \\ y_{sj} \\ y_{aj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix}.$$

Программный код

Требуется реализовать численное моделирование динамики клеточных популяций в системе, связанной с процессами кроветворения и лейкозом на языке программирования Python. Основные задачи и функции можно описать следующим образом:

1. Использование библиотеки `numpy` для работы с массивами и выполнения математических операций, а также `matplotlib` для визуализации данных.

2. Задаются начальные значения для четырех типов клеток: здоровых клеток u_h , лейкозных клеток u_d , стволовых клеток u_s и клеток микроокружения u_a . Определяются параметры, влияющие на размножение и взаимодействие клеток, такие как скорость размножения и коэффициенты, характеризующие взаимодействия между различными клеточными популяциями.

3. Разделяется интервал времени на N частичных отрезков для проведения численного интегрирования.

4. В функции `grid_method()` строится система линейных уравнений, которая описывает изменения в количестве клеток во времени.

5. Решается система линейных уравнений [8].

6. Функция `print_plot()` выводит графики для каждой из клеточных популяций (H, D, S, A) по времени, что позволяет визуально оценить динамику изменений.

7. Результаты моделирования для каждой популяции клеток выводятся на экран и отображаются на графиках. Это помогает исследовать, как различные параметры влияют на рост и взаимодействие клеток в модели.

Код является частью исследования, направленного на понимание динамики клеточных популяций, что может иметь значение в контексте онкологии и медицины, особенно в отношении лейкоза и других заболеваний, связанных с нарушением кроветворения.

```
# Подключение библиотек
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.backends.backend_pdf import PdfPages
```

```
# Ввод данных
h0 = 0.526 # количество здоровых клеток
```

```

d0 = 0.031 # количество лейкозных клеток
s0 = 0.359 # количество стволовых клеток
a0 = 0.0646 # клетки микроокружения

nu1 = 0.1 # удельная скорость размножения донорских клеток
nu2 = 0.20
nu3 = 0.40
nu4 = 0.80

beta = 0.35 # количеству стволовых клеток, в равновесном состоянии
# при естественной генерации
alpha = 0.98 # скорость появления новых клеток
gamma = 0.007 # параметр интенсивности ингибирования
v1 = 0.5 # Скорости перехода здоровых клеток
v2 = 0.5 # Скорости перехода здоровых клеток

mu1 = 1.0 # удельные равные скорости
mu2 = 1.5 # удельные равные скорости
mu3 = 2.0 # удельные равные скорости
mu4 = 2.5 # удельные равные скорости

N = 100 # количество частичных отрезков разбиения сетки
t0 = 0 # левая граница
T = 1 # правая граница

tau = (T - t0) / N # равномерная сетка

def grid_method():
    harray = np.zeros(N + 1)
    darray = np.zeros(N + 1)
    sarray = np.zeros(N + 1)
    aarray = np.zeros(N + 1)

    harray[0] = h0
    darray[0] = d0
    sarray[0] = s0
    aarray[0] = a0

    for j in range(1, N + 1):
        A = np.zeros((4, 4)) # матрица
        b = np.zeros(4) # вектор для правых частей

        A[0, :] = [
            (1 / tau) - nu * mu1 * (1 - harray[j-1] - darray[j-1] - sarray[j-1])
+ (1 - nu) * v1 + (1 - nu) * mu1 * harray[j-1],
            (1 - nu) * mu1 * harray[j-1],
            -nu * alpha * gamma * aarray[j-1],
            -(1 - nu) * alpha * gamma * sarray[j-1]
        ]

        A[1, :] = [
            -nu * (mu2 * (1 - harray[j-1] - darray[j-1] - sarray[j-1]) - (1 - nu)
* mu2 * (-harray[j-1])),

```

```

        (1 / tau) - (1 - nu) * mu2 * (-harray[j-1] - v2),
        -(1 - nu) * (mu2 * (-harray[j-1])) + (1 - alpha) * gamma * aarray[j-1]),
        -nu * (1 - alpha) * gamma * sarray[j-1]
    ]

    A[2, :] = [
        -(1 - nu) * (mu3 * (-harray[j-1] * harray[j-1])),
        -(1 - nu) * (mu3 * (-harray[j-1])),
        (1 / tau) - (1 - nu) * (mu3 * (-harray[j-1])) - gamma * aarray[j-1],
        -nu * (-gamma * sarray[j-1])
    ]

    A[3, :] = [
        0,
        0,
        -nu * (-mu4 * (aarray[j-1]*(-1))),
        (1 / tau) - (1 - nu) * (-mu4 * (beta - sarray[j-1]))
    ]

    b[0] = (harray[j-1] / tau) + (1 - nu) * mu1 * harray[j-1]
    b[1] = (darray[j-1] / tau) + (1 - nu) * mu2 * darray[j-1]
    b[2] = (sarray[j-1] / tau) + (1 - nu) * mu3 * sarray[j-1]
    b[3] = (aarray[j-1] / tau) + (1 - nu) * mu4 * aarray[j-1]

    # Решаем систему уравнений A * x = b
    x = np.linalg.solve(A, b)

    harray[j], darray[j], sarray[j], aarray[j] = x

    return harray, darray, sarray, aarray

# Инициализация PDF-файла
pdf_file = «results.pdf»
with PdfPages(pdf_file) as pdf:

    # Генерация графиков для разных значений nu
    for nu in [nu1, nu2, nu3, nu4]:
        # Выполнение метода сетки
        harray, darray, sarray, aarray = grid_method()

        # Создание графиков
        plt.figure(figsize=(10, 6))
        plt.plot(np.linspace(t0, T, N + 1), harray, label='Здоровые клетки - H',
            color='blue')
        plt.plot(np.linspace(t0, T, N + 1), darray, label='Лейкозные клетки - D',
            color='red')
        plt.plot(np.linspace(t0, T, N + 1), sarray, label='Стволовые клетки - S',
            color='green')
        plt.plot(np.linspace(t0, T, N + 1), aarray, label='Клетки микроокружения
        - A', color='orange')

        plt.title(f'Поведение клеток при  $\eta=\{nu\}$ ')

```

```

plt.xlabel('Время')
plt.ylabel('Количество клеток')
plt.legend()
plt.grid()

# Сохранение текущего графика в PDF
pdf_filename = f'График_η_{nu}.pdf'
pdf.savefig() # Сохраняем текущий график в PDF
plt.close()   # Закрываем текущую фигуру

```

print(f»Графики успешно сохранены в файл {pdf_file}»)

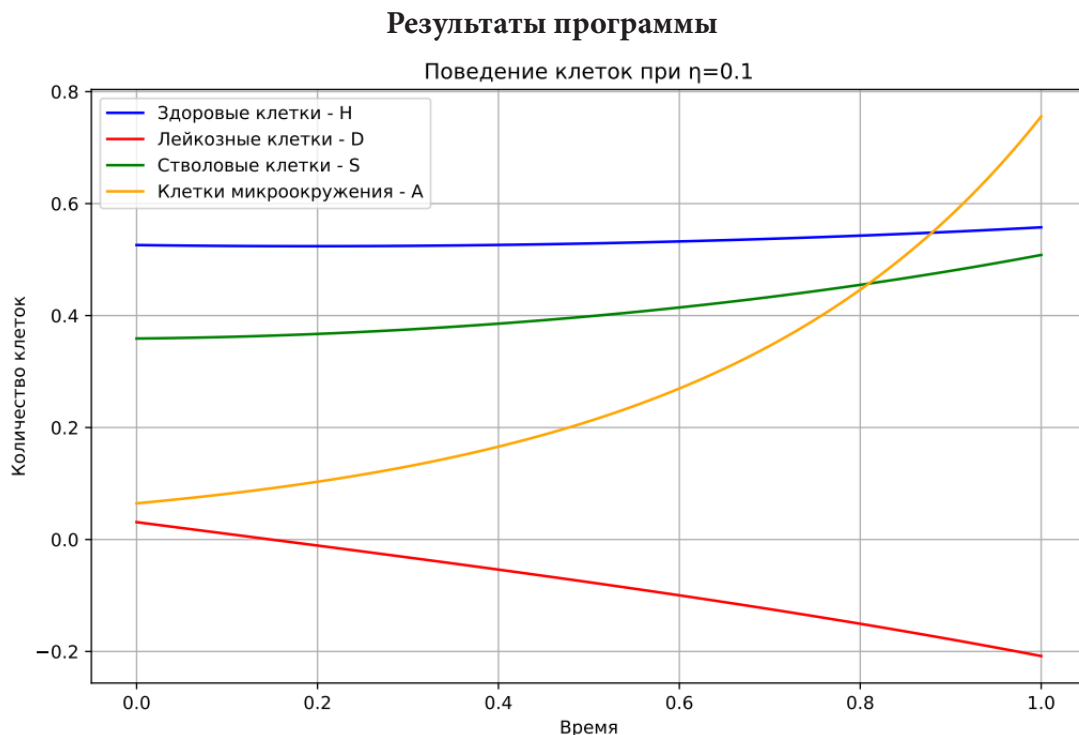


Рис. 1. Поведение клеток при $\eta = 0.1$

На этом графике можно наблюдать начальную стадию взаимодействия клеток.

Здоровые клетки (H): Вероятно, их количество растет в начале, так как они находятся в более благоприятных условиях.

Лейкозные клетки (D): Их рост может быть умеренным или медленным, что указывает на то, что при небольшом η лейкозные клетки не могут быстро преобладать.

Стволовые клетки (S): Их динамика может быть стабильной или немного увеличивающейся, возможно, в ответ на потребности микроокружения.

Клетки микроокружения (A): Их поведение, скорее всего, также умеренное, что позволяет поддерживать баланс в системе.

На графике (рис. 2):

Здоровые клетки (H): Количество продолжает расти, но с большей вероятностью начинает замедляться из-за растущего давления со стороны лейкозных клеток.

Лейкозные клетки (D): Их количество может начать ускоряться, так как увеличение η способствует их размножению.

Стволовые клетки (S): Динамика стволовых клеток может измениться, они начинают участвовать в противостоянии лейкозным клеткам.

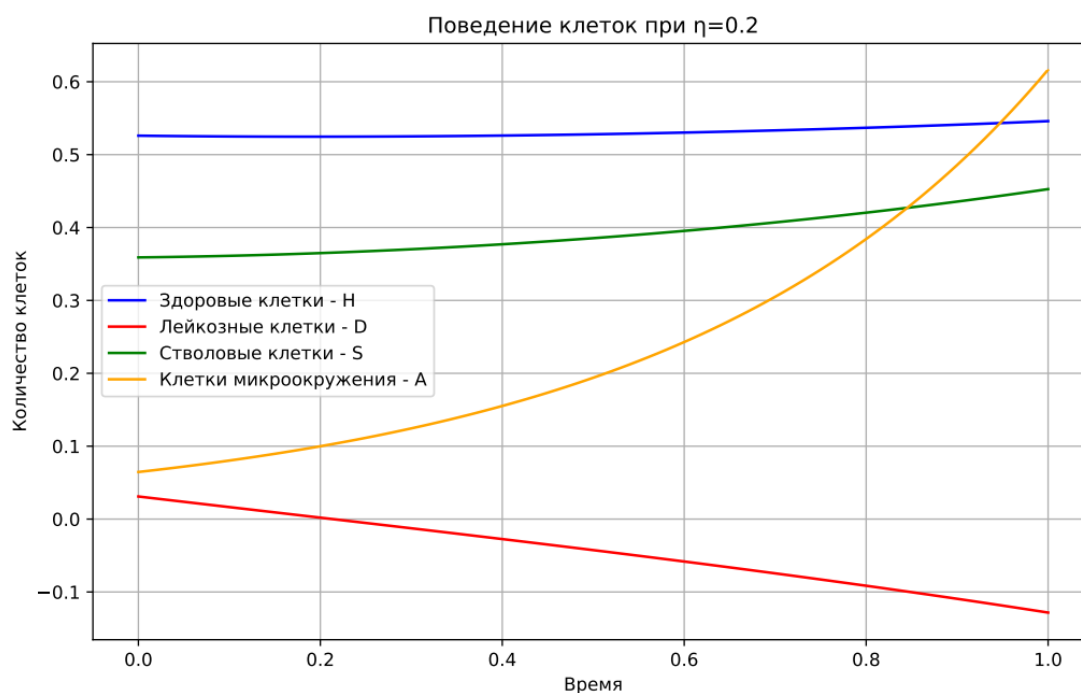


Рис. 2. Поведение клеток при $\eta = 0.2$

Клетки микроокружения (A): Взаимодействие с другими клетками становится более интенсивным, что может влиять на их количество.

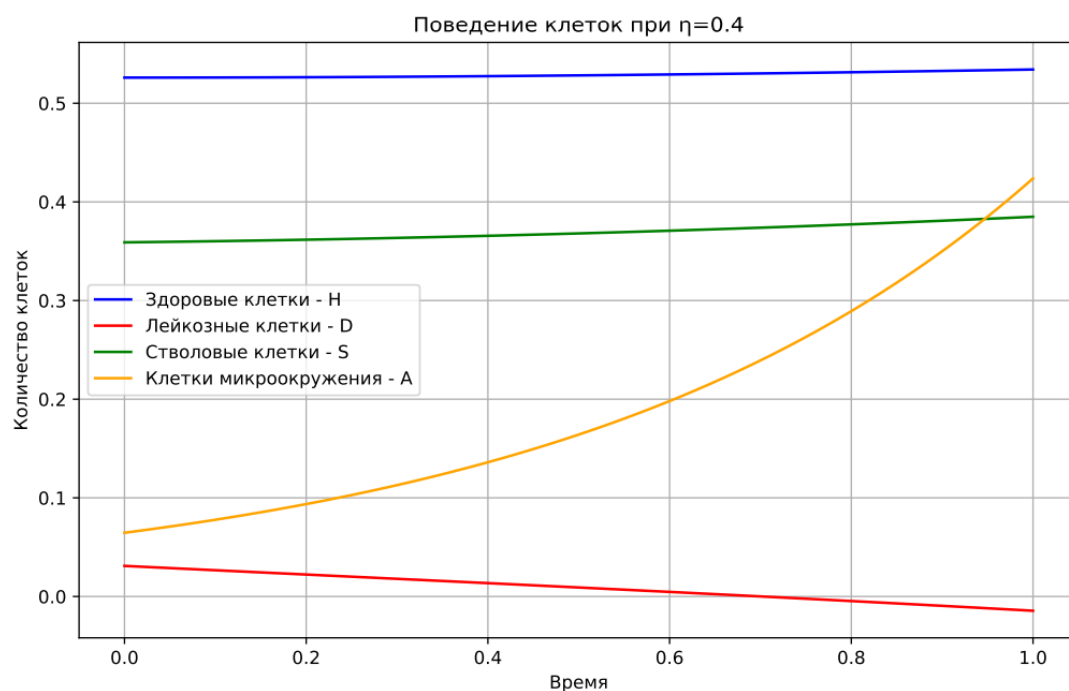


Рис. 3. Поведение клеток при $\eta = 0.4$

Наблюдается заметное изменение в динамике клеток.

Здоровые клетки (H): Количество начинает снижаться под давлением лейкозных клеток.

Лейкозные клетки (D): Их количество значительно возрастает, что указывает на доминирование лейкозных клеток в данной модели.

Стволовые клетки (S): Они могут либо оставаться стабильными, либо начинать сокращаться, если не хватает ресурсов для их поддержки.

Клетки микроокружения (A): Их динамика может отражать изменения в клеточном окружении, возможно, происходят изменения в их количестве из-за активного взаимодействия с другими типами клеток.

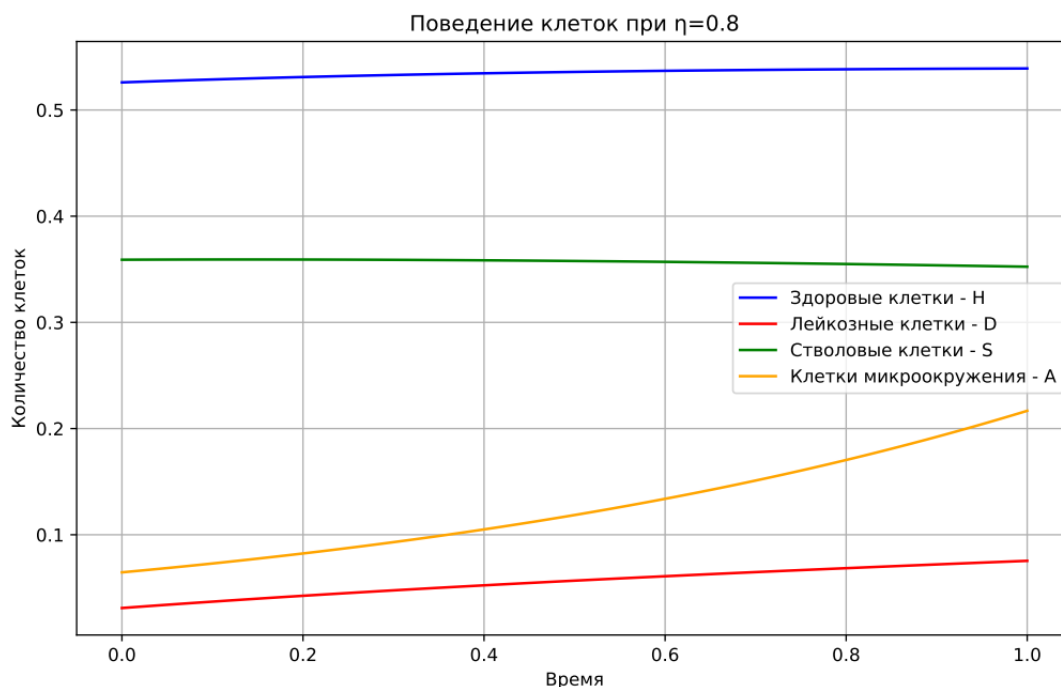


Рис. 4. Поведение клеток при $\eta = 0.8$

При таком высоком значении η модель может показывать серьезные изменения в поведении клеток.

Здоровые клетки (H): Вероятно, их количество резко снижается, поскольку лейкозные клетки получают колоссальное преимущество.

Лейкозные клетки (D): Их рост, скорее всего, достигает максимума, и они становятся доминирующим типом клеток в системе.

Стволовые клетки (S): Их количество может значительно сократиться, так как они не могут конкурировать с растущими лейкозными клетками.

Клетки микроокружения (A): Могут сильно варьироваться в зависимости от того, как они реагируют на сильное влияние лейкозных клеток, но снижение общего количества тоже возможно.

В результате, у нас есть результаты нескольких численных экспериментов, полученные при измельчении сетки. Мы видим, что два последних результата мало отличаются друг от друга, это дает нам косвенную надежду, что все правильно считается.

Заключение

Изучение динамики клеточных взаимодействий при различных значениях параметра η предоставляет важные сведения о том, как изменения в микроокружении могут влиять на поведение различных типов клеток. Этот анализ имеет особое значение для понимания процессов, связанных с онкологией, регенерацией тканей и патогенезом различных заболеваний.

Параметр η , скорее всего, отражает скорость взаимодействия между клетками или уровень их агрессивности. При малых значениях η (например, 0.1) системы остаются сбалансированными, где здоровые клетки способны сохранять свою численность без значительного влияния со стороны лейкозных клеток. Это может быть связано с тем, что в условиях низкой

агрессивности лейкозные клетки не имеют достаточной силы, чтобы доминировать над здоровыми клетками. В такой среде здоровые клетки могут активно делиться и поддерживать свое количество, что важно для нормального функционирования организма.

С увеличением значения η (до 0.2 и 0.4) наблюдается изменение динамики: число лейкозных клеток начинает расти, а здоровые клетки начинают подвергаться более значительному стрессу. Это подчеркивает, что даже небольшие изменения в микросреде могут значительно повлиять на здоровье организма. Высокий уровень η может означать, что клетки начинают конкурировать за ресурсы, такие как питательные вещества и пространство, что ведет к ухудшению состояния здоровых клеток.

При ($\eta = 0.4$) мы видим, что лейкозные клетки становятся основным источником угрозы для здоровых клеток. Это может объясняться активной саморазмножающейся природой лейкозных клеток, которые начинают вытеснять здоровые клетки, что приводит к угнетению нормальных гематопоетических процессов. Такие условия могут также способствовать развитию дополнительных мутаций и активизации других механизмов, которые еще больше усиливают малигнизацию клеток.

Наконец, при высоких значениях η (как 0.8) мы можем говорить о критической ситуации, когда лейкозные клетки практически полностью доминируют. Их присутствие может подавлять иммунный ответ организма, что делает его более уязвимым к инфекциям и другим заболеваниям. В таких условиях нормальная гомеостаза нарушается, и организм не может восстановить утраченные функции. Это драматический пример того, как высоко агрессивная среда приводит к быстрой эволюции злокачественных клеток, которые становятся устойчивыми к терапии и препятствуют нормальному функционированию организма.

Таким образом, исследование влияния параметра η на динамику клеточных взаимодействий является ключевым моментом в понимании сложных биологических систем. Эти знания могут не только помочь в лечении заболеваний, но и расширить наши представления о клеточной биологии, иммунологии и онкологии. В конечном итоге, глубокое понимание этих процессов может улучшить качество жизни пациентов и принести новые подходы в медицинскую практику.

Благодарности

Выражаю особую благодарность моему научному руководителю Половинкину Игорю Петровичу, доценту, доктору физико-математических наук, за значимые замечания и важнейшие советы при проведении исследования и оформления данной статьи.

Литература

1. Глушков В. Г., Сергеев А. А. Численные методы решения СЛАУ: Метод сеток и его применения. – Москва : Наука, 2021. – 280 с.
2. Математическая модель лейкоза [Электронный ресурс]. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=irj&paperid=225&option_lang=rus (дата обращения: 01.10.2024).
3. Метод конечных разностей [Электронный ресурс]. URL: https://portal.tpu.ru/SHARED/a/ALEX1479/study/Matmod/Tab1/Tab/11%20Лекция%20Мат_мод_физ_процессов.pdf (дата обращения 09.11.2024).
4. Смирнова Е. Е., Кузнецов В. В. Применение дифференциальных уравнений в биомедицинских исследованиях. – Новосибирск : Сибирское университетское издательство, 2019. – 300 с.
5. Ковалев Д. Д. Исследование моделей лейкемии с использованием численных методов // Журнал прикладной математики. – 2023. – Т. 58, № 2. – С. 45–56.

6. Глушков В. Г., Сергеев А. А. Численные методы решения СЛАУ: Метод сеток и его применения. – Москва : Наука, 2021. – 280 с.
7. Кузнецов И. И., Петрова Н. Н. Методы численного решения линейных уравнений. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2020. – 320 с.
8. Романов В. В. Алгоритмы и программирование методов решения СЛАУ. – Новосибирск : Сибирское университетское издательство, 2023. – 180 с.
9. Fuentes-Garí M. A mathematical model of subpopulation kinetics for the deconvolution of leukaemia heterogeneity / M. Fuentes-Garí, R. Misener, D. García-Munzer and others // Journal of the Royal Society Interface. – 2015. – V. 12. – № 108. 20150276. doi:10.1098/rsif.2015.0276.
10. Berezansky L. Stability and Controllability Issues in Mathematical Modeling of the Intensive Treatment of Leukemia / L. Berezansky, S. Bunimovich-Mendrazitsky, B. Shklyar // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2015. – V. 167, № 1. – P. 326–341. doi:10.1007/s10957-015-0717-9.
11. Rădulescu I. R. A complex mathematical model with competition in Leukemia with immune response - An optimal control approach / I. R. Rădulescu, D. Căndea, A. Halanay // IFIP Advances in Information and Communication Technology. – 2016. – V. 494. – P. 430–441. doi:10.1063/1.4765573
12. Bunimovich-Mendrazitsky C. Mathematical model of pulsed immunotherapy for bladder cancer / C. BunimovichMendrazitsky, H. Byrne, L. Stone // Bulletin of mathematical biology. – 2008. – V. 70, № 7. – P. 2055–2076. doi:10.1007/s11538-008-9344-z.
13. Clapp G. A review of mathematical models for leukemia and lymphoma / G. Clapp, D. Levy // Drug Discovery Today: Disease Models. – 2015, V. 16, № 2. – P. 1–6.
14. Kolpak E. P. Neoplasm Morbidity among the Population of Russia / E. P. Kolpak, I. S. Frantsuzova, K. V. Kuvshinova // International journal of advanced biotechnology and research. – 2017. – V. 8, № 3 – P. 2315–2322.
15. Жукова И. В. Математические модели злокачественной опухоли / И. В. Жукова, Е. П. Колпак // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2014. – № 3. – С. 5–18.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ К-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА КИПРИЯНОВА ПРИ УСЛОВИИ НЕЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО ПСЕВДОЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Е. А. Грязнева

Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского

Аннотация. В работе доказана теорема о фундаментальном решении сингулярного дифференциального уравнения Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}$ с отрицательными индексами оператора Бесселя $-1 < -\gamma_i < 0$, при условии нечетной размерности трансцендентного псевдоевклидова пространства.

Ключевые слова: фундаментальное решение, оператор Бесселя, оператор Киприянова, весовая линейная форма, пространства Шварца основных функций, радиальная функция.

Введение

Оператор

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 0 < \gamma_i < 1, \quad (1)$$

называется сингулярным дифференциальным оператором И. А. Киприянова (введен в [1]).

Уравнение

$$\Delta_{B_{-\gamma}}^m u = f(x), \quad x \in R_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i > 0, i = \overline{1, n}\}$$

будем называть сингулярным дифференциальным уравнением Киприянова.

Число $-|\gamma| = -\gamma_1 - \gamma_2 - \dots - \gamma_n$, следуя [2], будем называть коэффициентом скрытой сферической симметрии, а число $n - |\gamma| > 0$ — трансцендентной (дробноразмерной) размерностью псевдоевклидова пространства $R_{n-|\gamma|}$.

Введем весовые линейные формы двух видов

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\Omega \subseteq R_n^+} u(x) v(x) \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i} dx, \quad (u, v)_1 = \int_{\Omega \subseteq R_n^+} u(x) v(x) \prod_{i=1}^n x_i dx. \quad (2)$$

В качестве основного пространства функций рассматривается подпространство Л. Шварца $S_{ev} = S_{ev}(R_n^+)$, состоящее из функций четных по каждой координате своего аргумента. Пространство распределений Шварца — Киприянова $S'_{ev, -\gamma}$ или $S'_{ev, 1}$ представляют собой пространство двойственное к S_{ev} , порожденные весовыми линейными формами (2) соответственно.

δ — Функцией Дирака — Киприянова будем называть сингулярное весовое распределение

$$(\delta_{-\gamma}, \varphi)_{-\gamma} = \varphi(0).$$

Обычными средствами легко показать, что оператор Киприянова (1) является эрмитовым (самосопряженным по Лагранжу) в рамках весовой линейной формы $(\cdot, \cdot)_{-\gamma}$. Следовательно, по определению действия оператора (1) на распределение $f \in S'_{ev, -\gamma}$, полагаем

$$(\Delta_{B_{-\gamma}} u, \varphi)_{-\gamma} = (u, \Delta_{B_{-\gamma}} \varphi)_{-\gamma}. \quad (3)$$

1. Фундаментальное решение K -полигармонического оператора

Таким образом, нам нужно найти функционал $\mathcal{E}$, для которого

$$\left(\Delta_{B_{-\gamma}} \mathcal{E}, \varphi\right)_{-\gamma} = \int_{R_n^+} \mathcal{E}(x) \left(\Delta_{B_{-\gamma}} \varphi(x)\right) \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i} dx = \left(\delta_{-\gamma}, \varphi\right)_{-\gamma} = \varphi(0).$$

Вначале заметим, что из условия на мультииндекс γ вытекает неравенство $n - |\gamma| > 0$ и, следовательно $n - |\gamma| - 1 > -1$. Воспользуемся формулой Киприянова — Бельтрами действия оператора (1) на радиальную функцию (см. [1]):

$$\Delta_{B_{-\gamma}} f(|x|) = B_{n-|\gamma|-1} f(r) = B_{\mu} r^k, \quad \mu = n - |\gamma| - 1.$$

Лемма 1. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $0 < \gamma_i < 1$. Имеет место равенство

$$\Delta_{B_{-\gamma}} r^k = B_{\mu} r^k = k(k + n - |\gamma| - 2) r^{k-2}, \quad (4)$$

где $B_{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-|\gamma|-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ — оператор Бесселя с параметром $\mu = n - |\gamma| - 1 > -1$.

Доказательство. Учитывая приведенную выше формулу Киприянова — Бельтрами, и то, что $f = |x|^k = r^k$ — радиальная функция, получим

$$\begin{aligned} \Delta_{B_{-\gamma}} |x|^k &= B_{n-|\gamma|-1} r^k = \frac{\partial^2 r^k}{\partial r^2} + \frac{n-|\gamma|-1}{r} \frac{\partial r^k}{\partial r} = k(k-1) r^{k-2} + \frac{n-|\gamma|-1}{r} k r^{k-1} = \\ &= (k^2 - k + (n-|\gamma|-1)k) r^{k-2} = k(k + n - |\gamma| - 2) r^{k-2}. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Следствие. Имеет место равенство

$$\Delta_{B_{-\gamma}}^m r^{2m-n+|\gamma|} = \Delta_{B_{-\gamma}} \left(\Delta_{B_{-\gamma}}^{m-1}\right) r^{2m-n+|\gamma|} = \Xi \Delta_{B_{-\gamma}} r^{2-n+|\gamma|}, \quad (5)$$

где коэффициент Ξ определен равенством

$$\Xi = \prod_{k=0}^{m-2} (2m - 2k - n + |\gamma|) \prod_{l=1}^{m-1} 2(m-l). \quad (6)$$

Доказательство. Положим в равенстве (4) $k = 2m - n + |\gamma|$. Тогда

$$\Delta_{B_{-\gamma}}^m r^{2m-n+|\gamma|} = \Delta_{B_{-\gamma}} \left(\Delta_{B_{-\gamma}}^{m-1}\right) r^{2m-n+|\gamma|} = \Delta_{B_{-\gamma}} \Xi r^{2-n+|\gamma|}.$$

Для определения коэффициента Ξ воспользуемся формулой (4), в которой полагаем $k = 2m - n + |\gamma|$. В результате получим

$$\begin{aligned} \left(\Delta_{B_{-\gamma}}^{m-1}\right) r^{2m-n+|\gamma|} &= (2m - n + |\gamma|)(2m - n + |\gamma| + n - |\gamma| - 2) \left(\Delta_{B_{-\gamma}}^{m-2}\right) r^{2m-2-n+|\gamma|} = \\ &= (2m - n + |\gamma|)(2m - 2) \left(\Delta_{B_{-\gamma}}^{m-2}\right) r^{2m-2-n+|\gamma|} = \\ &= (2m - n + |\gamma|)(2m - 2)(2m - 2 - n + |\gamma|)(2m - 2 - n + |\gamma| + n - |\gamma| - 2) \left(\Delta_{B_{-\gamma}}^{m-3}\right) r^{2m-4-n+|\gamma|} = \\ &= (2m - n + |\gamma|)(2m - 2)(2m - 2 - n + |\gamma|)(2m - 4) \left(\Delta_{B_{-\gamma}}^{m-3}\right) r^{2m-4-n+|\gamma|} = \\ &= (2m - n + |\gamma|)(2m - 2)(2m - 2 - n + |\gamma|)(2m - 4)(2m - 4 - n + |\gamma|)(2m - 6) \left(\Delta_{B_{-\gamma}}^{m-4}\right) r^{2m-6-n+|\gamma|} = \\ &= (2m - n + |\gamma|)(2m - 2)(2m - 2 - n + |\gamma|)(2m - 4)(2m - 4 - n + |\gamma|)(2m - 6) \times \dots \times \\ &\quad \times \dots \times (4 - n + |\gamma|) \cdot 2 \left(\Delta_{B_{-\gamma}}^0\right) r^{2-n+|\gamma|}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем равенство (5) с константой имеет следующий вид:

$$\Xi = (2m - n + |\gamma|)(2m - 2)(2m - 2 - n + |\gamma|)(2m - 4)(2m - 4 - n + |\gamma|)(2m - 6)(4 - n + |\gamma|) \cdot 2,$$

которую удобно представить в виде (6). Доказательство закончено.

2. Фундаментальное решение $\Delta_{B_{-\gamma}}^m$ оператора Киприянова.

Теорема. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $0 < \gamma_i < 1$ и число $n - |\gamma|$ не является четным. Фундаментальное решение K -полигармонического оператора Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}^m$ с особенностью в начале координат представлено следующим регулярным распределением $S'_{ev, -\gamma}$

$$\mathcal{E}_{-\gamma}(x) = \Xi^{-1} \frac{|x|^{2m-n+|\gamma|}}{(2-n+|\gamma|)|S_1(n)|_{-\gamma}},$$

где коэффициент Ξ определен равенством (6), а площадь поверхности нагруженной сферы $|S_1(n)|_{-\gamma}$ определена при всех $\gamma_i \in (0, 1)$ и вычисляется по формуле (см. [1]).

$$|S_1^+(n)|_{-\gamma} = 2^n \int_{S_1^+(n) = \{x: |x|=1, x_i > 0\}} \prod_{k=1}^n x_i^{-\gamma_k} dS \frac{2 \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{1-\gamma_i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-|\gamma|}{2}\right)}.$$

Доказательство вытекает из формулы (5), поскольку функция

$$\frac{|x|^{2m-n+|\gamma|}}{(2-n+|\gamma|)|S_1(n)|_{-\gamma}}$$

есть фундаментальное решение оператора Киприянова (см. [3]).

Рассмотренная здесь задача поставлена профессором Л. Н. Ляховым. Автор благодарен за поставленную задачу и за консультации при работе над этой темой.

Литература

1. Ляхов Л. Н. Оператор Киприянова — Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В- гармонического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 12. – С. 1610–1620.
2. Ляхов Л. Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, вып. 4. – С. 517–528.
3. Ляхов Л. Н. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина, С. А. Рошупкин, Ю. Н. Булатов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2023. – № 7. – С. 52–65.

О НЕКОТОРЫХ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

Ф. А. Евсеев

Югорский государственный университет

Аннотация. Дан обзор исследований, посвященных квазигидродинамическим уравнениям в случае слабосжимаемой жидкости, как в нелинейном, так и в линеаризованном виде, а также квазигидродинамическим уравнениям в приближении мелкой воды. Описаны некоторые результаты по аналитическому и численному решению начально-краевых задач для таких уравнений. Приведены математические модели течения в масштабе порового пространства пород-коллекторов, основанные на квазигидродинамическом подходе.

Ключевые слова: квазигидродинамические уравнения, слабосжимаемая жидкость, начально-краевая задача, мелкая вода, модель, цифровой керн.

Введение

В последнее время все большую популярность набирает направление математического моделирования процессов нефтегазодобычи, которое рассматривает эффективные подходы к численному моделированию широкого круга течений газа и жидкости. Так, например, актуальной задачей является моделирование процессов микротечений жидкости сквозь геометрию порового пространства кернового материала. Один из подходов для решения этой задачи может быть основан на использовании математических моделей, обобщающих систему уравнений Навье-Стокса и отличающиеся от нее дополнительными диссипативными слагаемыми.

В работе рассматриваются системы квазигидродинамических уравнений для случая слабосжимаемой жидкости и в приближении мелкой воды, приводится описание моделей, предназначенных для цифрового анализа керна.

1. Система квазигидродинамических уравнений в случае слабосжимаемой жидкости

Рассмотрим систему квазигидродинамических уравнений в случае слабосжимаемой жидкости (см. параграф 1.2 в [1]):

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}, \quad \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{u} \otimes \vec{u} + \nabla p = \rho \vec{f} + 2\eta \operatorname{div} \sigma + \rho \operatorname{div} ((\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})), \quad (1)$$

где тензор скоростей деформации σ имеет форму: $\sigma(\vec{u}) = 1/2((\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{\nabla})^T)$. Вектор $\vec{w}$ определяется по формуле $\vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + 1/\rho \nabla p - \vec{f})$. Плотность ρ , коэффициент динамической вязкости η и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами. Векторное поле $\vec{f} = \vec{f}(x, t)$ определяет массовую плотность внешних сил. Система (1) замкнута относительно неизвестных функций — вектора скорости $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$ и давления $p = p(x, t)$. Символы div и ∇ определяют операции дивергенции и градиента соответственно.

Систему (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= \operatorname{div} \vec{w}, \quad \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{f}), \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times G, \quad G \subset R^3, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \vec{f} + \mu \Delta \vec{u} + \mu \nabla (\operatorname{div} \vec{u}) + (\vec{u}, \nabla)\vec{w} + \vec{w} \operatorname{div} \vec{u}, \end{aligned} \quad (2)$$

где G — ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$ (см. определения в [2, гл. 1]), $\mu = \eta/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости.

Первые варианты системы (1) были получены Елизаровой Т. Г. и Четверушкиным Б. Н. в 80-е годы в работах [3, 4] на основе известной кинетической модели. Первые варианты системы дифференциальных уравнений в частных производных называются системой квазигазодинамических (КГД) уравнений. Посвященную ей теорию и ее детальный анализ свойств можно найти в монографиях [5, 6]. Позднее, в 90-е годы Шеретовым Ю. В. на основе более общего уравнения состояния была предложена еще одна модель [7], которая получила название квазигидродинамическая (КГид) система уравнений (см. системы (1), (2)). В частности, вывод этой модели и некоторые результаты можно найти в работе [1]. Сошлемся также на работы [8–10], в которых были описаны новые точные решения, общие для систем Навье — Стокса и КГид уравнений, выведена интегрируемая система обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой является частным случаем решения исходной стационарной КГид системы уравнений, а также сформулирован и доказан принцип суперпозиции решений для исходной нелинейной КГид системы уравнений.

Злотником А. А. [11, 12] были получены результаты по части анализа некоторых неклассических задач для КГид уравнений. В [11] (см. также [12]) была обобщена КГид модель на случай произвольного уравнения состояния, удовлетворяющего условиям термодинамической устойчивости, наличия внешних сил и источников тепла $(\partial p / \partial \rho)_T > 0$, $(\partial \varepsilon / \partial T) > 0$, $p = p(\rho, T)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$. Для линеаризованной КГид системы приводятся доказательства теоремы существования и единственности обобщенных решений задач Коши и начально-краевых задач в случае реального и политропного газа на произвольном временном промежутке, выведены соответствующие энергетические неравенства. Позднее, Злотником А. А. была впервые получена регуляризация квазигазодинамического типа гетерогенной модели (в квазигомогенной форме), для которой строилась реализующая ее явная двухслойная по времени и симметричная трехточечная по пространству разностная схема в 1D случае и приводятся численные результаты [13]. Доказательства теоремы существования и единственности обобщенных и регулярных решений аналога первой начально-краевой задачи для системы (2) представлены в работах [14] и [15] соответственно. Доказательство обобщенного решения основано на методе Галёркина с использованием априорных оценок [14]. В работе [15], при определенных условиях на данные, и условии нормировки, показано, что существует единственное регулярное решение начально-краевой задачи локально по времени.

Система (2) в линеаризованном случае имеет вид [16]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= \operatorname{div} \vec{W}, \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{w}_0, \nabla) \vec{V} + (\vec{V} - \vec{W}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \\ &= \vec{F} + \mu \Delta \vec{V} + \mu \nabla \operatorname{div} \vec{V} + (\vec{v}, \nabla) \vec{W} + (\vec{V}, \nabla) \vec{w}_0 + \vec{W} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{w}_0 \operatorname{div} \vec{V}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\vec{w}_0 = \tau[(\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p_0 - \vec{f}_0]$ и $\vec{W} = \tau[(\vec{v}, \nabla) \vec{V} + (\vec{V}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla P - \vec{F}]$.

Авторами статьи [16] была исследована теорема существования и единственности решений начально-краевых задач для линеаризованной КГид системы (3) в пространствах Соболева. Были рассмотрены случаи обобщенных и регулярных решений. Существование и единственность обобщенного решения доказывается при некоторых условиях гладкости на данные. В случае регулярного решения возникают также и некоторые ограничения на нормы данных. Полученные результаты обеспечивают соответствующие оценки устойчивости решений исходной нелинейной задачи.

Отметим, что система (2) (см. также систему (3)) состоит из двух частей: первая представляет собой эллиптическое уравнение относительно давления, а вторая представляет собой параболическую систему. Более того, неизвестные p и $\vec{u}$ входят в главные части эллиптического уравнения и параболической системы.

2. Система квазигидродинамических уравнений в приближении мелкой воды.

Рассмотрим систему КГиД уравнений в приближении мелкой воды (см. параграф 3.1 в [1]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\vec{u}) &= \operatorname{div}(h\vec{w}), \quad \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + g\nabla h), \\ \frac{\partial(h\vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(h\vec{u} \otimes \vec{u}) + g\nabla\left(\frac{h^2}{2}\right) &= 2\operatorname{div}(vh\hat{\sigma}(\vec{u})) + \operatorname{div}(h\vec{w} \otimes \vec{u} + h\vec{u} \otimes \vec{w}), \\ (t, x) \in Q &= (0, T) \times G, G \subset R^2. \end{aligned} \quad (4)$$

где тензор скоростей деформации $\hat{\sigma}$ имеет форму:

$$\hat{\sigma}(\vec{u}) = \hat{\sigma} = \frac{1}{2}[(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T], \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ix_j} + u_{jx_i}),$$

G — ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, коэффициент кинематической вязкости жидкости ν и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами. Пусть $S = (0, T) \times \Gamma$. Вектор $\vec{u} = (u_1(t, x_1, x_2), u_2(t, x_1, x_2))$ — усредненная по высоте скорость течения. Величина $h = h(t, x_1, x_2)$ интерпретируется как расстояние по вертикали от ровного дна водоема, расположенного в плоскости $x_1 O x_2$, до свободной поверхности жидкости. Система включает константу Галилея $g = 9,8 (m / c^2)$, равную модулю ускорения свободного падения в гравитационном поле Земли.

Уравнения в теории мелкой воды описывают процессы в природе, связанные с движением несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести и характеризующиеся пренебрежительно малым размером вертикального масштаба по сравнению с размером по горизонтали [17]. Система КГиД уравнений в теории мелкой воды (4) является аналогом уравнения Сен-Венана [1], представляющего собой систему нелинейных гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных, которые аппроксимируют полную систему уравнений Эйлера [18]. Вывод уравнений Сен-Венана и их детальный анализ свойств представлены в [19, 6]. Отдельно уделим внимание работам [20–23], в которых исследуются вопросы разрешимости теоремы существования и единственности решений уравнений Сен-Венана. В статье [20] авторами исследована единственность классического решения системы одномерных уравнений Сен-Венана. Локальное по времени и глобальное существование классических решений для диссипативных уравнений мелкой воды рассматривается в [21] и [22], соответственно. В работе [23] с помощью подхода, основанный на теории неподвижной точки суммы двух операторов в банаховых пространствах, исследуется проблема начального значения для одномерных уравнений Сен-Венана.

Опишем некоторые результаты, посвященные численному и аналитическому решению задач в теории мелкой воды (уравнений Сен-Венана). В работах Ляпидевского В. Ю. и Чеснокова А. А. [24, 25, 17] большое внимание уделяется построению и анализу нелинейных математических моделей, отражающие влияние неоднородностей полей скорости и плотности на структуру волн в стратифицированных и многофазных течениях, описываемые гиперболическими системами дифференциальных и интегродифференциальных уравнений в теории мелкой воды. В работе [24] для описания стационарных и нестационарных волн используются модели второго приближения теории мелкой воды, а также их гиперболические аппроксимации. В [25] в приближении теории мелкой воды рассматривается горизонтально-сдвиговое движение однородной жидкости в открытом канале, построены стационарные решения уравнений движения и решена задача о структуре слоя смешения. В описанных выше работах выполнены верификация предложенных моделей на основе сравнения с известными экспериментальными данными и численными решениями уравнений в теории мелкой воды.

Следует отметить, что на развитие и разработку моделей движения слоистой жидкости существенное влияние оказала работа Овсянникова Л. В., посвященная исследованию моде-

лей двухслойной мелкой воды [26]. Отметим также работы Тешукова В. М. [27, 28] и Шелухина В. В. [29].

3. Квазигидродинамические модели для цифрового ядра

Немалый вклад модели, основанные на системе КГД уравнений (см. системы (1)–(4)), внесли в решение задач, посвященные технологии «цифровой ядра», суть которой заключается в прямом численном моделировании течений в масштабе порового пространства пород-коллекторов нефти и газа с разрешением структуры этого пространства и динамики межфазных границ [30]. В качестве примера рассмотрим некоторые из таких моделей.

В работе [30] для описания многофазных течений используется КГД регуляризация модели Навье — Стокса — Кана — Хилларда (5), состоящая в добавлении в уравнения системы специальных диссипативных слагаемых, пропорциональных малому параметру, имеющему размерность времени:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha u^m) &= -\operatorname{div} b_\alpha, \quad \alpha = 1, 2; \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u^m \otimes u) + \nabla p &= \operatorname{div} \Pi + \operatorname{div} \Pi^\lambda + \rho \nabla \Phi,\end{aligned}\tag{5}$$

где $\rho_\alpha(x, t) > 0$ — плотность компонента смеси с номером α , $\rho(x, t)$ — полная плотность смеси, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $u(x, t)$ — скорость жидкости, w — регуляризирующая скорость жидкости, $u^m = u - w$. Массовая сила описывается потенциалом $\Phi(x)$. Векторы b_α описывают диффузионные потоки компонентов:

$$b_\alpha = -M_{\alpha\beta} \nabla(\theta^{-1} \hat{\mu}_\beta), \quad \sum_{\beta=1}^2 M_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

$M_{\alpha\beta}(\bar{\rho}) > 0$ — коэффициент подвижности компонентов, которые образуют симметричную матрицу. $\theta > 0$ — температура смеси.

На основе модели (5) авторами [30] получены результаты численных расчетов двухфазного вытеснения флюидов в образце горной породы. Построены кривые относительных фазовых проницаемостей. В [31] были описаны и численно исследованы модели с КГД-регуляризацией однофазного однокомпонентного течения

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot j_m &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (j_m \otimes u) + \nabla p &= \nabla \cdot \Pi,\end{aligned}\tag{6}$$

и двухфазного двухкомпонентного течения

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \operatorname{div} j_m &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(j_m \otimes u) + \nabla p &= \operatorname{div} \Pi, \\ \partial_t(\rho C) + \operatorname{div}(j_m C) &= \operatorname{div}(M \nabla \mu).\end{aligned}\tag{7}$$

с использованием программного комплекса DiMP-Hydro, предназначенный для моделирования микротечений однофазных и двухфазных вязких сжимаемых жидкостей с различной релогией в пространственных областях, геометрия которых имеет воксельное представление, актуальное для применения методов рентгеновской компьютерной томографии.

Заключение

В работе были рассмотрены квазигидродинамические уравнения для случая слабосжимаемой жидкости как в нелинейном, так и в линеаризованном виде, а также квазигидродинамические уравнения в приближении мелкой воды. Описаны некоторые результаты аналитического и численного исследования начально-краевых задач для таких уравнений. Приведены математические модели течения в масштабе порового пространства пород-коллекторов, основанные

на квазигидродинамическом подходе. Показана актуальность использования моделей данного типа для решения задач при цифровом анализе керна.

Литература

1. Шеретов Ю. В. Регуляризованные уравнения гидродинамики : монография / Ю. В. Шеретов. – Твер. гос. ун-т. – Тверь : ТвГУ, 2016. – 222 с.
2. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – М. : Наука, 1967.
3. Elizarova T. G. A computational algorithm for the calculation of gas-dynamic flows / T. G. Elizarova, B. N. Chetverushkin // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1984. – Vol. 279:1. – P. 80–83.
4. Елизарова Т. Г. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений / Т. Г. Елизарова. – М. : ИПМ. – 1984. – 23 с.
5. Жериков А. В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости / А. В. Жериков. – Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2010. – 124 с.
6. Шеретов Ю. В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении / Ю. В. Шеретов. – М. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 400 с.
7. Шеретов Ю. В. Об одной новой математической модели в гидродинамике / Ю. В. Шеретов // В книге Применение функционального анализа в теории приближений. – Тверь: Тверской государственный университет. – 1996. С. 124–134.
8. Шеретов Ю. В. О построении точных решений двумерной квазигидродинамической системы / Ю. В. Шеретов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2021. – № 1. – С. 5–20.
9. Шеретов Ю. В. О точных решениях стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах / Ю. В. Шеретов // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. – 2017. – № 1. – С. 85–94.
10. Шеретов Ю. В. Принцип суперпозиции решений квазигидродинамической системы / Ю. В. Шеретов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2022. – № 2. – С. 60–73.
11. Злотник А. А. Линеаризованная устойчивость равновесных решений квазигазодинамической системы уравнений / А. А. Злотник // Доклады Академии наук – 2010. – Т. 433, № 6. – С. 599–603.
12. Злотник А. А. Пространственная дискретизация одномерной баротропной квазигазодинамической системы уравнений и уравнение энергетического баланса / А. А. Злотник // Матем. Моделирование. 2021. – 24:10. – С. 51–64.
13. Zlotnik A. A. Regularized Equations for Dynamics of the Heterogeneous Binary Mixtures of the Noble-Abel Stiffened-Gases and Their Application / A. A. Zlotnik, T. A. Lomonosov // Dokl. Math. – 2023. – Vol. 108. – P. 443–449.
14. Евсеев Ф. А. Разрешимость начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости / Ф. А. Евсеев // Вестник Югорского государственного университета. – 2024. – Т. 20, № 2. – С. 97–106.
15. Pyatkov S. P. Regular Solvability of the First Initial–Boundary Value Problem for the Quasi-hydrodynamic System of Equations in the Case of a Weakly Compressible Fluid / S. P. Pyatkov, F. A. Evseev // J Math Sci. – 2024. – Vol. 81. – P. 909–924.
16. Evseev F. A. On Some Properties of a Linearized Quasi-Hydrodynamical System of Equations / S. P. Pyatkov, F. A. Evseev // Lobachevskii J Math. – 2023. – Vol. 44. – P. 3266–3276.
17. Ляпидевский В. Ю. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости: монография / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков – РАН. СО. Ин-т гидродинамики им. М. А. Лаврентьева. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. – 419 с.

18. *Bresch D.* Shallow-Water Equations and Related Topics / D. Bresch // In Handbook on Differential Equations. Elsevier, 2009. – Vol. 5. – P. 1–104.
19. *Li Y.* On Classical Solutions to 2D Shallow Water Equations with Degenerate Viscosities / Y. Li, R. Pan, S. Zhu // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. – 2017. – Vol. 19, No 1 – P. 151–190.
20. *Lai H. V.* On Uniqueness of a Classical Solution of the System of NonLinear 1-D Saint Venant Equations / H. V. Lai, L. M. Long, M. D. Trung // Vietnam Journal of Mechanics, NCST of Vietnam. – 1999. – Vol. 21, No 4. – P. 231–238.
21. *Ton B. A.* Existence and Uniqueness of a Classical Solution of an Initial Boundary Value Problem of the Theory of Shallow Waters / B. A. Ton // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1981. – Vol. 12, No 2. – P. 229–241.
22. *Kloeden P. E.* Global Existence of Classical Solutions in the Dissipative Shallow Water Equations / Kloeden P. E. // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1985. – Vol. 16, No 2. – P. 301–315.
23. Existence of Global Classical Solutions for the Saint-Venant Equations / R. Azib, S. Georgiev, A. Kheloufi, K. Mebarki // Vladikavkaz Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 24, No 3. – P. 21–36.
24. *Ляпидевский В. Ю.* Дисперсионные эффекты и блокировка потока при обтекании порога / В. Ю. Ляпидевский, К. Н. Гаврилова // Прикл. мех. техн. физ.. – 2008. – Vol. 49, No 1. – P. 45–58.
25. *Чесноков А. А.* Эволюция горизонтального слоя смешения в мелкой воде / А. А. Чесноков, В. Ю. Ляпидевский // Прикл. мех. техн. физ. – 2019. – Vol. 60, No 2. – P. 207–219.
26. *Овсянников Л. В.* Модели двухслойной «мелкой воды» / Л. В. Овсянников // Прикладная механика и техническая физика. – 1979. – Т. 20, № 2(114). – С. 3–14.
27. *Тешуков В. М.* Модель сильного разрыва для уравнений пространственных длинных волн, распространяющихся на сдвиговом течении со свободной границей / В. М. Тешуков, А. К. Хе // Прикл. мех. техн. физ. – 2008. – Vol. 49, No 4. – P. 206–213.
28. *Тешуков В. М.* Пространственные простые волны на сдвиговом течении / В. М. Тешуков // Прикл. мех. техн. физ. – 2002. – Vol. 43, No 5. – P. 28–40.
29. *Шелухин В. В.* Об одной начально-краевой задаче для уравнений фильтрации трех несмешивающихся капиллярных жидкостей / В. В. Шелухин // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2006. – Vol. 6, No 2. – P. 103–113.
30. *Балашов В. А.* Технология «цифровой керн» и суперкомпьютерные вычисления / В. А. Балашов, Е. Б. Савенков, Б. Н. Четверушкин // Вестник Российской академии наук. – 2023. – Т. 93, № 6. – С. 503–511.
31. *Балашов В. А.* Вычислительные технологии программного комплекса DiMP-Hydro для моделирования микротечений / В. А. Балашов, Е. Б. Савенков, Б. Н. Четверушкин // Матем. Моделирование. – 2019. – Т. 31, № 7. – С. 21–44.

ФУНКЦИОНАЛЬНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. С. Еремин

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются явные методы решения функционального дифференциального уравнения запаздывающего типа второго порядка, первая производная решения которого входит в правую часть только своим значением в текущий момент времени. Формулируется явный функционально-непрерывный метод решения такого уравнения, который начиная с четвёртого порядка, требует меньше этапов, чем аналогичные методы для уравнения первого порядка. Приводится конкретная расчётная схема метода четвёртого порядка. Проводится численное тестирование, подтверждающее его сходимость с порядком четыре.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, функционально-непрерывные уравнения, дифференциальные уравнения второго порядка, методы Рунге — Кутты, непрерывные методы, методы с непрерывными этапами.

Введение

В [1] рассмотрены одношаговые методы типа Рунге — Кутты (РК) для функционального дифференциального уравнения запаздывающего типа (ФДУЗТ)

$$\dot{u}(t) = g(t, u_t), \quad (1)$$

где $u_t = u(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$ для некоторого максимального запаздывания r . Под $\dot{u}$ понимается производная по независимой переменной t .

Из-за того, что правая часть зависит от решения вплоть до текущей точки непосредственное применение непрерывных методов Рунге — Кутты (НРК) (см., напр., [2]), разработанных для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), становится невозможным. Авторы [1] строят явные методы типа Рунге — Кутты, названные ими функционально-непрерывными (ФНРК), которые изначально сконструированы для решения уравнений вида (1). Они выводят условия для обеспечения дискретного и равномерного порядков до 4-го включительно и дают общий подход для построения методов произвольного порядка. В силу большей сложности условий порядка и ориентированности методов в том числе на уравнения (1) с недифференцируемой по первому аргументу функцией g , минимальное количество этапов для обеспечения определённого порядка в них больше, чем у НРК. При этом даже использование первого этапа следующего шага для построения непрерывного приближения к решению [2, 3], начиная с четвёртого порядка делает эти методы более дорогими, чем НРК и тем более, чем классические методы РК для ОДУ.

В [4] для уравнения второго порядка без зависимости от первой производной

$$\ddot{u}(t) = g(t, u_t), \quad (2)$$

строятся явные методы (ФНРКН), реализующие идею методов Рунге — Кутты — Нюстрёма, которые за счёт особого вида уравнения снижают необходимое число этапов для достижения определённого порядка. В [3] идея развита и построены методы с использованием первого этапа следующего шага. Сравнение минимального числа этапов для различных методов представлено в табл. 1. Число этапов, указанное как $s + 1$ означает использование первого этапа следующего шага для построения непрерывного приближения, что сокращает на 1 количество вычислений правой части на шаг.

Таблица 1

Сравнение минимального числа этапов явных методов Рунге — Кутты				
Порядок, p	РК	НРК	ФНРК	ФНРКН
2	2	2	2	1 + 1
3	3	3 + 1	3 + 1	2 + 1
4	4	5 + 1	6 + 1	4 + 1
5	6	7 + 1	10 + 1	6 + 1

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$\ddot{u}(t) = g(t, u, \dot{u}(t)), \quad (3)$$

описывающее, например, модель раскачивания груза при работе портового крана [5]. В первом разделе сформулирован сам метод. Во разделе 2 приводятся коэффициенты метода четвёртого порядка, требующего 5 + 1 этап. В третьем разделе приводятся результаты численного тестирования, подтверждающие сходимость четвёртого порядка для построенного метода.

1. Функционально-непрерывный метод

Мы рассматриваем одношаговый метод типа Рунге — Кутты для применения к уравнению (1) на некотором промежутке $t \in [t_0, t_{\text{end}}]$ при заданной начальной функции $\varphi(t)$, определяющей решение левее t_0 , но не обязательно удовлетворяющей уравнению (3):

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \leq t_0.$$

Аналогично применению методов Рунге — Кутты для ОДУ решение строится шаг за шагом, причём решение на предыдущем шаге служит частью начальной функции для следующих шагов. На n -м шаге $[t_{n-1}, t_n]$ решается локальная начальная задача

$$\begin{cases} \ddot{y}^{[n]}(t) = f(t, y_t^{[n]}, \dot{y}^{[n]}(t)), & t \in [0, h_n], \\ y^{[n]}(t) = \psi^{[n]}(t), & t \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $h_n = t_n - t_{n-1}$, $y_t^{[n]}(t) = u(t_{n-1} + t)$, $f(t, \cdot, \cdot) = g(t_{n-1} + t, \cdot, \cdot)$, а $\psi^{[n]}(t)$ — начальная функция локальной задачи, составленная из начальной функции глобальной задачи $\varphi(t)$ и непрерывных решений предыдущих шагов. На первом шаге локальная задача совпадает с глобальной с точностью до сдвига аргумента, а именно $y^{[1]}(t) = u(t_0 + t)$, $\psi^{[1]}(t) = \varphi(t_0 + t)$.

В рамках данной статьи штрих ($\cdot'$) не является обозначением производной, а только указывает на то, что соответствующие величины соотносятся с производной решения $\dot{u}$ в том же смысле, в каком величины без точки соотносятся с самим решением u .

Определение 1. Явным s -этапным (для натурального s) функционально-непрерывным методом Рунге — Кутты для уравнения второго порядка (3) называется набор матриц и векторов $(A(\cdot), A', b(\cdot), b'(\cdot), c)$, где

- $A(\cdot)$ — полиномиальная матрица размерности $s \times s$, такая что $A(0) = \mathbf{O}$,
- A' — строго нижнетреугольная матрица размерности $s \times s$,
- $b(\cdot)$ и $b'(\cdot)$ — полиномиальные векторы длины s , такие что $b(0) = b'(0) = \mathbf{O}$,
- c — вектор длины s с $c_1 = 0$ и $c_i \geq 0$ для $i = 2, \dots, s$.

В дальнейшем опустим индексы $^{[n]}$ и ${}_n$ при рассмотрении одного шага метода. Применение рассматриваемого метода $(A(\cdot), A', b(\cdot), b'(\cdot), c)$ с длиной шага h к задаче (4) даёт непрерывное приближение решения на интервале $[0, h]$:

$$\begin{aligned}
y(\alpha h) &\approx \eta(\alpha h) = \psi(0) + \alpha h \dot{\psi}(0) + h^2 \sum_{i=1}^s b_i(\alpha) K_i, \\
\dot{y}(\alpha h) &\approx \eta'(\alpha h) = \dot{\psi}(0) + h \sum_{i=1}^s b'_i(\alpha) K_i,
\end{aligned} \tag{5}$$

где оценки вторых производных решения

$$K_i = f(T_i, Y_{T_i}^i, Y_i'), \quad i = 1, \dots, s,$$

абсциссы этапов $T_i = c_i h$, $Y^i : [T_i - r, T_i] \rightarrow \mathbb{R}^d$ — этапные приближения решения, находящиеся по формуле

$$Y^i(\alpha h) = \psi(0) + \alpha h \dot{\psi}(0) + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(\alpha) K_j, \quad \alpha \in [0, c_i],$$

$$Y^i(t) = \psi(t), \quad t \leq 0,$$

а этапные приближения производной решения Y_i' (нужные только в точках T_i) находятся как в случае методов Рунге — Кутты — Нюстрёма для ОДУ:

$$Y_i' = \dot{\psi}(0) + h \sum_{j=1}^{i-1} a'_{ij} K_j.$$

Обратим внимание на то, что требования $b(0) = b'(0) = \mathbf{0}$ и $A(0) = \mathbf{0}$ обеспечивают непрерывность приближений к решению и его производной, в том числе на каждом из этапов.

Непрерывные этапные приближения $Y^i(\alpha h)$ требуются, в частности, и для уравнений с переменным дискретным запаздыванием, в случае, когда оно становится его слишком маленьким, и требуется получить достаточно точное приближение к решению внутри текущего шага. Такая ситуация называется «оверлэппингом» или «перекрытием». Реализация НКР на шагах с перекрытием становится полностью неявной, в то время как ФНРК сохраняют свою явность.

Определение 2. Говорят, что метод (5) имеет *дискретный локальный порядок* $p \in \mathbb{N}$, если для любой достаточно гладкой на промежутке $[0, h]$ задачи (4) и любого достаточно малого шага $h > 0$ найдутся числа $C > 0$ и $C' > 0$ такие, что

$$\begin{aligned}
\|y(h) - \eta(h)\| &< Ch^{p+1}, \\
\|\dot{y}(h) - \eta'(h)\| &< C'h^{p+1}.
\end{aligned}$$

Говорят, что метод (5) имеет *равномерный локальный порядок* $q \in \mathbb{N}$, если для любой достаточно гладкой на промежутке $[0, h]$ задачи (4) и любого достаточно малого шага $h > 0$ найдутся числа $\tilde{C} > 0$ и $\tilde{C}' > 0$ такие, что

$$\begin{aligned}
\max_{\alpha \in [0, 1]} \|y(\alpha h) - \eta(\alpha h)\| &< \tilde{C} h^{q+1}, \\
\max_{\alpha \in [0, 1]} \|\dot{y}(\alpha h) - \eta'(\alpha h)\| &< \tilde{C}' h^{q+1}.
\end{aligned}$$

Определение 3. Пусть для задачи (3) на промежутке $[t_0, t_{\text{end}}]$ выполнено N шагов ($t_N = t_{\text{end}}$) и построены непрерывные приближения к решению $\omega(t)$ и к его производной $\omega'(t)$ на каждом шаге $[t_{n-1}, t_n]$ определяемые приближённым решением локальной задачи (4), причём на каждом шаге решаемая задача является достаточно гладкой. Говорят, что метод (5) имеет *дискретный глобальный порядок* $p \in \mathbb{N}$ (сходится в точках сетки с порядком p), если при достаточно малом максимальном шаге $h = \max_{n=1, N} h_n$ найдутся числа $L > 0$ и $L' > 0$ такие, что

$$\begin{aligned}
\max_{n=1, N} \|u(t_n) - \omega(t_n)\| &< L h^p, \\
\max_{n=1, N} \|\dot{u}(t_n) - \omega'(t_n)\| &< L' h^p.
\end{aligned}$$

Также говорят, что метод (5) имеет *равномерный глобальный порядок* $q \in \mathbb{N}$ (сходится равномерно с порядком q), если найдутся числа $\tilde{L} > 0$ и $\tilde{L}' > 0$ такие, что

$$\max_{t \in [t_0, t_{\text{end}}]} \|u(t) - \omega(t)\| < \tilde{L}h^q,$$

$$\max_{t \in [t_0, t_{\text{end}}]} \|\dot{u}(t) - \omega'(t)\| < \tilde{L}'h^q.$$

Замечание 1. Из вышеприведенных определений ясно, что равномерный порядок всегда не превосходит дискретный, так как из сходимости на отрезке следует сходимость как минимум того же порядка на его концах.

Замечание 2. Для сходимости одношаговых методов решения ОДУ с порядком p в точках сетки достаточно, чтобы на каждом шаге метод имел локальный порядок p (см. [6]). Если метод к тому же на каждом шаге имеет равномерный локальный порядок q , то порядок равномерной сходимости для ОДУ определяется как $\min(p, q + 1)$. Однако для ФДУЗТ даже в точках сетки порядок сходимости не может превышать $\min(p, q + 1)$ (см. [7]). Практически это означает, что метод с локальным дискретным порядком p и равномерным порядком $p - 1$ будет равномерно сходиться с порядком p . В то же время, для более точного контроля погрешности и для непосредственной применимости методов к уравнениям нейтрального типа предпочтительно строить методы с равномерным локальным порядком p .

2. Метод четвертого порядка

Условия порядка для метода (5) более сложны, чем обычные условия для методов решения ОДУ [6] и чем условия для методов решения ФДУЗТ первого порядка [1]. В первую очередь следует отметить, что мы считаем функцию g непрерывно-дифференцируемой по своему первому аргументу, в связи с чем не можем пользоваться сравнением разложений $y(\alpha h)$ и $\eta(\alpha h)$ в ряды Тейлора в точке $h = 0$ [1]. К тому же появляются условия для обеспечения нужного порядка приближения $\eta'(\alpha h)$ к $y'(\alpha h)$. К сожалению, сами условия, их вывод и, тем более, доказательство их необходимости и достаточности, не могут войти в рамки настоящей публикации.

Ниже приводится таблица Бутчера для метода (5) четвёртого равномерного порядка, имеющего $5 + 1$ этап, что на 1 этап меньше, чем минимальное необходимое число этапов для решения ФДУЗТ первого порядка ([1, 3]).

c_i	a'_{ij}						$a_{ij}(\alpha)$					
0												
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}\alpha^2$					
$\frac{5}{9}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{25}{81}$					$a_{31}(\alpha)$	$a_{32}(\alpha)$				
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{24}$	0	$\frac{5}{8}$				$a_{31}(\alpha)$	$a_{32}(\alpha)$				
$\frac{1}{3}$	$\frac{29}{150}$	0	$\frac{11}{50}$	$-\frac{2}{25}$			$a_{31}(\alpha)$	$a_{32}(\alpha)$				
1	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$		$b_1(\alpha)$	0	0	$b_4(\alpha)$	$b_5(\alpha)$	
	$b'_1(\alpha)$	0	0	$b'_4(\alpha)$	$b'_5(\alpha)$	$b'_6(\alpha)$	$b_1(\alpha)$	0	0	$b_4(\alpha)$	$b_5(\alpha)$	0

(6)

$$b'_1(\alpha) = \alpha - \frac{13}{5}\alpha^2 + \frac{13}{5}\alpha^3 - \frac{9}{10}\alpha^4$$

$$b'_4(\alpha) = -\frac{12}{5}\alpha^2 + \frac{32}{5}\alpha^3 - \frac{18}{5}\alpha^4$$

$$b'_5(\alpha) = \frac{15}{4}\alpha^2 - \frac{11}{2}\alpha^3 + \frac{9}{4}\alpha^4$$

$$b'_6(\alpha) = \frac{5}{4}\alpha^2 - \frac{7}{2}\alpha^3 + \frac{9}{4}\alpha^4$$

$$b_1(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{3}{10}\alpha^3 - \frac{7}{10}\alpha^4$$

$$b_4(\alpha) = -\frac{2}{15}\alpha^3 + \frac{1}{5}\alpha^4$$

$$b_5(\alpha) = \frac{5}{6}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^4$$

$$a_{31}(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha^3$$

$$a_{32}(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^3$$

Здесь повторное использование обеспечивается тем, что $b'_1(1) = \frac{1}{10}$, $b'_4(1) = \frac{2}{5}$, $b'_5(1) = \frac{1}{2}$, $b'_6(1) = 0$ и тем, что последняя строка матрицы $A(\alpha)$ совпадает с вектором $b(\alpha)$.

3. Численный пример

Рассмотрим начальную задачу для ДУ с дискретным запаздыванием, зависящим от времени, при решении которой возникает «перекрытие» и использование метода, не удовлетворяющего всем условиям четвёртого порядка для уравнений (3) приведёт к потере порядка сходимости.

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = \frac{\dot{u}(t)^2}{u(t)} \exp\left(\frac{t}{1+2t}\right) u\left(\frac{t}{(1+2t)^2}\right)^{1+2t}, & t \geq 0, \\ u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = -1. \end{cases} \quad (7)$$

Его точное решение $u(t) = \exp(-t)$, $t \geq 0$.

Мы решаем её представленным методом FCRKS4 четвёртого порядка (6) и методом четвертого порядка для уравнений (1) FCRK4 из [8] с $6 + 1$ этапами, применяя последний к системе первого порядка, полученной заменой $v(t) = \dot{u}(t)$.

Решение проводится с постоянным шагом на отрезке $[0, 3]$. Оцениваем максимальную погрешность решения E и его производной E' на этом отрезке для метода FCRK4, и те же величины для FCRKS4 (E_s и E'_s соответственно). Результаты приведены в табл. 2. Кроме того, там же приведены оценки равномерного порядка сходимости, подтверждающие сходимость 4-го порядка обоих методов для обеих приближаемых функций. Наглядно можно видеть эту сходимость на рис. 1, где зависимость $\lg\|E\|$ от $\lg h$ (и аналогичная зависимость других измеряемых погрешностей) представляет собой для достаточно малых h прямую с наклоном 4.

Таблица 2

Результаты решения задачи (7)

h	FCRKS4				FCRK4			
	$\lg(E_s)$	q_s	$\lg(E'_s)$	q'_s	$\lg(E)$	q	$\lg(E')$	q'
0.3000	-3.6474		-4.1559		-5.2765		-4.9267	
0.2000	-4.4085	4.3	-4.9023	4.2	-5.7783	2.8	-5.6029	3.8
0.1304	-5.1896	4.2	-5.6743	4.2	-6.1753	2.1	-6.2615	3.5
0.0857	-5.9437	4.1	-6.4242	4.1	-6.8534	3.7	-7.0861	4.5
0.0566	-6.6813	4.0	-7.1597	4.1	-7.6179	4.2	-7.8417	4.2
0.0375	-7.4078	4.0	-7.8849	4.1	-8.3570	4.1	-8.5651	4.0
0.0250	-8.1198	4.0	-8.5962	4.0	-9.0800	4.1	-9.2723	4.0
0.0167	-8.8294	4.0	-9.3055	4.0	-9.8029	4.1	-9.9819	4.0
0.0111	-9.5374	4.0	-10.0133	4.0	-10.5182	4.1	-10.6857	4.0
0.0074	-10.2443	4.0	-10.7202	4.0	-11.2323	4.1	-11.3902	4.0
0.0049	-10.9519	4.0	-11.4278	4.0	-11.9453	4.0	-12.0957	4.0
0.0033	-11.6581	4.0	-12.1351	4.0	-12.6508	4.0	-12.7932	4.0
0.0022	-12.3653	4.0	-12.8464	4.0	-13.3374	3.9	-13.4689	3.8

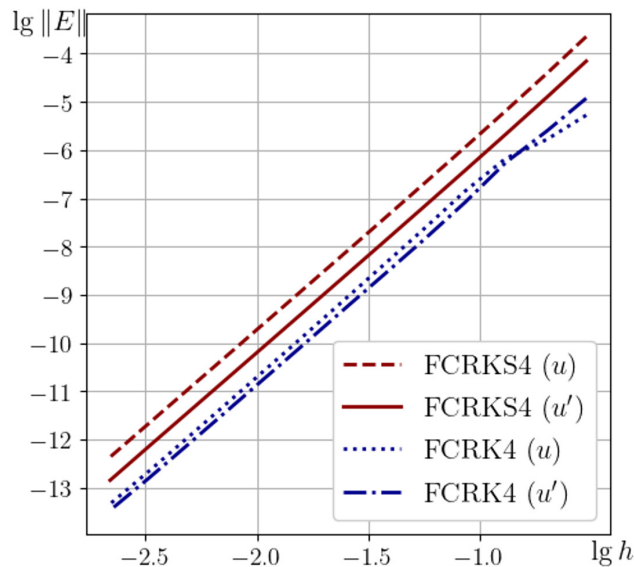


Рис. 1. Сходимость методов для задачи (7)

Заключение

Несмотря на то, что для данного конкретного примера абсолютная погрешность решения методом FCRK4 оказалась на той же длине шага меньше, уменьшение общего числа затрат для метода FCRKS4 несколько исправляет этот недостаток. К тому же, параметры в FCRK4 подбирались так, чтобы минимизировать некоторые члены погрешности, а для FCRKS4 такая оптимизация в настоящей работе не проводилась, так как основной целью ставилось показать возможность построения методов с меньшим числом этапов для уравнений вида (3).

Для эффективной реализации методов РК дополнительно требуется иметь вложенный оценщик локальной погрешности для управления длиной шага, который в случае функциональных дифференциальных уравнений также должен давать непрерывное приближение. В представленном методе такое приближение 3-го порядка для y может дать, например, продолжение полинома для третьего (четвёртого или пятого) этапа на отрезок $[0, 1]$, но для y' такое приближение нужно строить специально.

Литература

1. Maset S. Runge–Kutta methods for retarded functional differential equations / S. Maset, L. Torelli, R. Vermiglio // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2005. – Vol. 15, № 8. – P. 1203–1251. – DOI: 10.1142/S0218202505000716.
2. Owren B. Derivation of efficient, continuous, explicit Runge–Kutta methods / B. Owren, M. Zennaro // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. – 1992. – Vol. 13. – P. 1488–1501. – DOI: 10.1137/0913084.
3. Eremin A. S. Functional continuous Runge–Kutta methods with reuse / A. S. Eremin // *Applied Numerical Mathematics*. – 2019. – Vol. 146. – P. 165–181. – DOI: 10.1016/j.apnum.2019.07.012.
4. Eremin A. S. Functional continuous Runge–Kutta–Nyström methods / A. S. Eremin // *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. – 2016. – № 11. – P. 1–17. – DOI: 10.14232/ejqtde.2016.8.11.
5. Erneux Th. *Applied Delay Differential Equations* / Th. Erneux – New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2009. – 204 p.
6. Хайпер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. / Э. Хайпер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер – М. : Мир, 1999. – 512 с.

7. *Bellen A.* Numerical Methods for Delay Differential Equations / A. Bellen, M. Zennaro – Oxford: Oxford Science Publications, Clarendon Press, 2013. – 410 p.

8. *Еремин А. С.* Комбинированный функционально-непрерывный метод для дифференциальных уравнений с запаздыванием / А. С. Еремин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2019. – Т. 15, № 4. – С. 425–441. – DOI: 10.21638/11702/spbu10.2019.402.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ ГЕГЕНБАУЭРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ МГД-УРАВНЕНИЯ ФОЛКНЕРА — СКАНА

А. А. Захарова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В этой статье представляется взвешенная ортогональная система на полупрямой, основанная на экспоненциальных функциях Гегенбауэра. Я использую эти функции в методе коллокации для решения МГД-уравнения Фолкнера — Скана, которое возникает при изучении ламинарных пограничных слоев, проявляющих сходство в полубесконечной области. Этот метод решает задачу в полубесконечной области, не сокращая ее до конечной области и не преобразуя область задачи в конечную область.

Ключевые слова: экспоненциальный метод Гегенбауэра, метод коллокации, МГД-уравнение Фолкнера — Скана, полубесконечная область, нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ).

Введение

Уравнение Фолкнера — Скана было впервые введено Фолкнером и Сканом [15] при изучении обтекания неподвижного клина, погруженного в вязкую жидкость. Они применили преобразование подобия, которое может быть использовано для сведения уравнений пограничного слоя в частных производных к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка.

После этого интерес к исследованию этого уравнения и других течений в пограничном слое возрос [17, 25, 34, 38]. Ляо [27] применил метод гомотопического анализа, который не зависит от малых или больших физических параметров, для решения уравнения Фолкнера — Скана и дал явное, полностью аналитическое решение для этого уравнения с граничными условиями. Также Асайтхамби [3, 4] представил численные методы, основанные на методе конечных элементов и методе конечных разностей. Метод дифференциального преобразования, который позволяет получить последовательное решение уравнения Фолкнера — Скана, представлен в [26].

Кроме того, достижения в области машиностроения привели к росту интереса к магнито-гидродинамическим (МГД) потокам. МГД-вязкие потоки возникают во многих важных инженерных приложениях, в частности, в таких устройствах, как генераторы энергии, охлаждение реакторов, проектирование теплообменников, электростатических фильтров и МГД-ускорителей [36]. Магнитные поля, одна из управляющих сил, оказывают стабилизирующее воздействие на течение в пограничном слое [2]. Численный метод решения уравнения Фолкнера — Скана представлен в [5]. Йих [39] и Исхак с соавторами. [24] преобразовали уравнения пограничного слоя в частных производных в непохожие уравнения пограничного слоя и систему обыкновенных дифференциальных уравнений соответственно, затем они использовали метод Келлера для их решения. Хайат и др. [23] решили задачу о течении в пограничном слое МГД с помощью модифицированного метода декомпозиции и аппроксимации. Аббасбанди и др. [1, 2] применили метод гомотопического анализа и метод Ханкеля соответственно. Более того, авторы работы [18] установили существование и единственность результатов для уравнений, возникающих в МГД-потоке Фолкнера — Скана. Также в работе [31] было представлено приближенное решение этой задачи псевдоспектральным методом функций Эрмита. Кроме того, некоторые другие численные и аналитические решения также были применены к различным типам задач магнито-гидродинамики (МГД) потоков [16, 29, 22, 32].

Как я опишу в следующей части исследования, класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, возникающих в магнитогидродинамических (МГД) потоках Фолкнера — Скана, определяется на полубесконечном интервале. В контексте спектральных методов был предложен и исследован ряд подходов для обработки неограниченных и полубесконечных областей. Некоторые распространенные методы используют ортогональные многочлены, которые определяются в неограниченных областях, наиболее распространенным из них является использование многочленов, которые ортогональны в неограниченных областях [13, 28], задача отображения в ограниченную область [21] и метод усечения области [9]. Другой эффективный прямой подход для решения таких задач основан на рациональных приближениях. В этом методе вводится набор новых базисных функций, которые взаимно ортогональны в неограниченной области и применяются в спектральной схеме [12].

Целью данной статьи является разработка метода коллокации с новыми базисными функциями, а именно экспоненциальными функциями Гегенбауэра, для решения МГД-уравнения Фолкнера-Скана. Действительно, я использую экспоненциальное преобразование и имею функции в полубесконечной области для достижения высокой точности и экспоненциальной скорости сходимости решения.

Математическое описание

Рассмотрим стационарное ламинарное течение в пограничном слое электропроводной вязкой жидкости в присутствии магнитного поля $B(x)$. Предполагается, что индуцированное магнитное поле невелико. Это подразумевает малое магнитное число Рейнольдса, так что магнитным полем и эффектом Холла можно пренебречь. Кроме того, электрическое поле, возникающее в результате поляризации зарядов, пренебрежимо мало. Основные уравнения в приближении пограничного слоя можно записать в виде [2]:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} = U \frac{du}{dx} + v \frac{d^2v}{dy^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} (u - U), \quad (2)$$

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (3)$$

$$u = U(x), \quad \text{когда} \quad y \rightarrow \infty$$

где $U(x) = ax^m$ [33] и $B(x) = B_0 x^{(m-1)/2}$ [11], а u и v — составляющие скорости, U — внутренняя характеристическая скорость, ν — кинематическая вязкость, σ — электропроводность, ρ — плотность жидкости, B и B_0 — это магнитное поле и внешнее магнитное поле, направленное по y , соответственно.

Определяющий

$$\tau = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} y, \quad \psi = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\nu x U} f(\tau), \quad (4)$$

$$u = U f'(\tau), \quad v = -\sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left[f + \frac{m-1}{m+1} \tau f' \right], \quad (5)$$

уравнение неразрывности тождественно удовлетворяется, и уравнение (2) и граничные условия (3) приводят к следующему виду

$$\frac{d^3 f}{d\tau^3} + f \frac{d^2 f}{d\tau^2} + \beta \left[1 - \left(\frac{df}{d\tau} \right)^2 \right] - M^2 \left(\frac{df}{d\tau} - 1 \right) = 0, \quad (6)$$

с граничными условиями

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad (7)$$

где $\beta = \frac{2m}{m+1}$ и $M^2 = 2\sigma B_0^2 / \rho a(1+m)$. Теперь наша задача — найти решение уравнения (6) для клина в ускоренном потоке ($m > 0, \beta > 0$) и замедленном потоке ($m < 0, \beta < 0$) с разделением [2].

Экспоненциальная интерполяция Гегенбауэра

В этом разделе я представляю экспоненциальные функции Гегенбауэра и описываю некоторые из их основных свойств. Затем аппроксимирую функцию, используя интегрирование по Гауссу, с помощью экспоненциальных точек Гегенбауэра-Гаусса.

1.1. Свойства экспоненциальных функций Гегенбауэра

Многочлены Гегенбауэра $G_n^\alpha(y)$ порядка α и степени n определяются следующим образом [37]:

$$G_n^\alpha(y) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \frac{\Gamma(n+\alpha-j)}{j!(n-2j)!\Gamma(\alpha)} (2y)^{n-2j}, \quad (8)$$

где n — целое число, α — вещественное число, $> 1/2$, а Γ — гамма-функция.

Многочлены Гегенбауэра ортогональны в интервале $[-1, 1]$ относительно весовой функции $\rho(y) = (1-y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$, где $\alpha \geq \frac{1}{2}$. При фиксированном α они могут быть определены по следующей рекуррентной формуле [35]:

$$G_0^\alpha(y) = 1, \quad G_1^\alpha(y) = 2\alpha y, \quad G_{n+1}^\alpha(y) = \frac{1}{n+1} [2y(n+\alpha)G_n^\alpha(y) - (n+2\alpha-1)G_{n-1}^\alpha(y)], \quad (9)$$

$n \geq 1$

Для применения этих многочленов в полубесконечной области вводятся новые базисные функции, обозначаемые $E_n^\alpha(x) = G_n^\alpha(y)$, где L — постоянный параметр, а $y = 1 - 2e^{-\frac{x}{L}}$, $y \in [-1, 1]$. Постоянный параметр L задает масштаб длины отображения. Бойд [8] предложил несколько рекомендаций по оптимизации параметра отображения L для рациональных функций.

$E_n^\alpha(x)$ — это n -я собственная функция сингулярной задачи Штурма — Лиувилля:

$$4e^{-\frac{x}{L}} \left(1 - e^{-\frac{x}{L}}\right) E_n^{\alpha''}(x) - (2\alpha+1) \left(1 - 2e^{-\frac{x}{L}}\right) E_n^{\alpha'}(x) + n(n+2\alpha) E_n^\alpha(x) = 0, \quad (10)$$

где простое число обозначает дифференцирование по x .

Экспоненциальные функции Гегенбауэра удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$E_n^\alpha(x) = 1, \quad E_1^\alpha(x) = 2\alpha \left(1 - 2e^{-\frac{x}{L}}\right),$$

$$E_{n+1}^\alpha(x) = \frac{1}{n+1} \left[2 \left(1 - 2e^{-\frac{x}{L}}\right) (n+\alpha) E_n^\alpha(x) - (n+2\alpha-1) E_{n-1}^\alpha(x) \right], \quad (11)$$

$n \geq 1$

1.2. Аппроксимация функции

Мы можем определить $w(x) = \frac{2}{L} e^{-\frac{x}{L}} [4e - xL - e - xL]^{\alpha-\frac{1}{2}}$ как неотрицательную, интегрируемую, вещественнозначную весовую функцию для экспоненциального показателя Гегенбауэра на интервале $I = [0, \infty)$.

Обозначим

$$\rho(y) = (1 - y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}, y = 1 - 2e^{-\frac{x}{L}}, \quad (12)$$

следовательно, мы имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{L} e^{-\frac{x}{L}}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{L}{(y-1)}, \quad w(x) \frac{dx}{dy} = \rho(y). \quad (13)$$

Теперь мы определяем

$$L_w^2(I) = \{v : I \rightarrow \mathbb{R} \mid v, \|v\|_w < \infty\}, \quad (14)$$

где

$$\|v\|_w = \left(\int_0^\infty |v(x)|^2 w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

является нормой, индуцированной скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle_w = \int_0^\infty u(x) v(x) w(x) dx. \quad (16)$$

Таким образом, $E_n^\alpha(x)_{n \geq 0}$ обозначает систему, которая взаимно ортогональна согласно уравнению (16), т. е.,

$$\langle E_n^\alpha, E_m^\alpha \rangle_w = \frac{\pi 2^{1-2\alpha} \Gamma(n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)[\Gamma(\alpha)]^2} \delta_{nm}, \quad (17)$$

где δ_{nm} — дельта-функция Кронекера [35]. Эта система является полной в $L_w^2(I)$. Для любой функции $u \in L_w^2(I)$, выполняется следующее увеличение

$$u(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k E_k^\alpha(x), \quad (18)$$

$$\alpha_k = \frac{\langle u, E_k^\alpha \rangle_w}{\|E_k^\alpha\|_w^2} \quad (19)$$

α_k — это коэффициенты расширения, связанные с семейством $E_k^\alpha(x)$.

Формула дифференцирования для экспоненциального уравнения Гегенбауэра может быть получена следующим образом:

$$E_n^{\alpha'}(x) = \frac{d}{dx} E_n^\alpha(x) = \frac{4\alpha}{L} e^{-\frac{x}{L}} E_{n-1}^{\alpha-1}(x). \quad (20)$$

Итак, мы находим, что $E_n^{\alpha'}(x)$ также взаимно ортогональны в $L_{\hat{w}}^2(I)$ относительно весовой функции $\hat{w}(x) = \frac{L}{8\alpha^2} e^{-\frac{x}{L}} [4e - xL - e - xL]^{\alpha+\frac{1}{2}}$. Следовательно

$$\langle E_n^{\alpha'}, E_m^{\alpha'} \rangle_{\hat{w}} = \frac{\pi 2^{-(2\alpha+1)} \Gamma(2\alpha+n+1)}{(n-1)!(n+\alpha)[\Gamma(\alpha+1)]^2} \delta_{nm} \quad (21)$$

Решение уравнения Фолкнера — Скана

Теперь мы хотим применить метод экспоненциальной коллокации Гегенбауэра для решения МГД-уравнения Фолкнера — Скана, представленного в уравнении (6) с граничным условием в уравнении (7).

Уравнение Фолкнера — Скана имеет граничное условие типа $f'(\infty) = 1$. Итак, мы аппроксимируем $f(\tau)$ оператором $\frac{d}{d\tau} \tilde{P}_N f(\tau)$:

$$\tilde{P}_N f(\tau) = \tau + \sum_{k=0}^N a_k E_k^\alpha(\tau), \quad (22)$$

тогда остаточная функция МГД Фолкнера — Скана равна:

$$\begin{aligned} Res(\tau) = & \frac{d^3}{d\tau^3} \tilde{P}_N f(\tau) + \tilde{P}_N f(\tau) \frac{d^2}{d\tau^2} \tilde{P}_N f(\tau) + \\ & + \beta \left(1 - \left[\frac{d}{d\tau} \tilde{P}_N f(\tau) \right]^2 \right) - M^2 \left(\frac{d}{d\tau} \tilde{P}_N f(\tau) - 1 \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Решая набор следующих уравнений, мы аппроксимируем $f(\tau)$ и получаем a'_k s.

$$\begin{aligned} Res(\tau_j) &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ \tilde{P}_N f(0) &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} \tilde{P}_N f(\tau) \Big|_{\tau=0} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

такие, как τ_j , являются экспоненциальными точками Гегенбауэра — Гаусса.

Заключение

В этой статье мы ввели экспоненциальные функции Гегенбауэра в интервале $[0, \infty)$ и применили метод коллокации, основанный на этих функциях, для решения МГД-уравнения Фолкнера — Скана. Метод коллокации прост в реализации и обеспечивает требуемую точность. Важной особенностью коллокационного подхода является выбор базисных функций. Базисные функции обладают тремя различными свойствами: простотой вычисления, быстрой сходимостью и полнотой, что означает, что любое решение может быть представлено с произвольно высокой точностью, если принять значение N за достаточно большое. В качестве базисной функции в этой статье я использовала экспоненциальные функции Гегенбауэра. Метод коллокации с этими функциями позволяет решать задачи в полубесконечной области, такие как уравнение пограничного слоя, без их усечения до конечной области, наложения асимптотического условия и преобразования области задач. МГД-уравнение Фолкнера — Скана возникает при изучении ламинарных пограничных слоев. При выборе подходящих значений характеристической скорости и приложенного магнитного поля результирующие уравнения в частных производных сводятся к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка в полубесконечной области. Здесь преодолена трудность применения уравнений такого типа, связанная с существованием граничного условия на бесконечности. Обоснованность метода основана на предположении, что он сходится при увеличении числа точек Гаусса. Сравнение значений $f''(0)$ с численным решением показало, что новый метод быстро сходится.

Литература

1. Abbasbandy S., Hayat T. Solution of the MHD Falkner-Skan flow by Hankel-Padé method // Physics Letters A. – 2009. – P. 731–734.
2. Abbasbandy S., Hayat T. Solution of the MHD Falkner-Skan flow by homotopy analysis method // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2009. – P. 3591–3598.

3. *Asaithambi A.* A finite-difference method for the solution of the Falkner-Skan equation // *Applied Mathematics and Computation.* – 1998. – P. 135–141.
4. *Asaithambi A.* A second-order finite-difference method for the Falkner-Skan equation // *Applied Mathematics and Computation.* – 2004. – P. 779–786.
5. *Asaithambi N.* A numerical method for the solution of the Falkner-Skan equation // *Applied Mathematics and Computation.* – 1997. – P. 259–264.
6. *Baharifard F., Kazem S., Parand K.* Rational and exponential Legendre Tau method on steady flow of a third grade fluid in a porous half space // *International Journal of Applied and Computational Mathematics.* – 2015. – P. 1–20.
7. *Baharifard F., Parand K., Rashidi M.* Novel solution for heat and mass transfer of a MHD micropolar fluid flow on a moving plate with suction and injection // *Engineering with Computers.* – 2022. – P. 13–30.
8. *Boyd J. P.* The optimization of convergence for Chebyshev polynomial methods in an unbounded domain // *Journal of Computational Physics.* – 1982. – P. 43–79.
9. *Boyd J. P.* Chebyshev and Fourier Spectral Methods, Second Edition. – Dover, New York, 2000.
10. *Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A.* Spectral Methods in Fluid Dynamic. – Springer-Verlag, New York, 1987.
11. *Chaim T. C.* Hydromagnetic flow over a surface stretching with a power-law velocity // *International Journal of Engineering Science.* – 1995. – P. 429–435.
12. *Christov C.* A complete orthogonal system of functions in $l_2(-\infty, \infty)$ space // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* – 1982. – P. 1337–1344.
13. *Coulaud O., Funaro D., Kavian O.* Laguerre spectral approximation of elliptic problems in exterior domains // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – 1990. – P. 451–458.
14. *Delkhosh M., Parand K., Ganji D.* An efficient numerical method to solve the Falkner-Skan problem over an isothermal moving wedge // *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow.* – 2018. – P. 2132–2157.
15. *Falkner V. M., Skan S. W.* Some approximate solutions of the boundary-layer equations // *Philosophical Magazine.* – 1931. – P. 865–896.
16. *Farooq U., Zhao Y. L., Hayat T., Alsaedi A., Liao S. J.* Application of the HAM-based Mathematica package BVPh 2.0 on MHD Falkner-Skan flow of nano-fluid // *Computers & Fluids.* – 2015. – P. 69–75.
17. *Ganji D. D., Babazadeh H., Noori F., Pirouz M. M., Janipour M.* An application of Homotopy method for nonlinear Blasius equation to boundary layer flow over a flat plate // *International Journal of Nonlinear Science.* – 2009. – P. 399–404.
18. *Gorder R. A. V., Vajravelu K.* Existence and uniqueness results for a nonlinear differential equation arising in MHD Falkner-Skan flow // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2010. – P. 2272–2277.
19. *Gottlieb D., Hussaini M. Y., Orszag S.* Theory and Applications of Spectral Methods in Spectral Methods for Partial Differential Equations edited by R. Voigt and D. Gottlieb and M. Y. Hussaini. – SIAM, Philadelphia, 1984.
20. *Guo B. Y.* Gegenbauer approximation and its applications to differential equations on the whole line // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* – 1998. – P. 180–206.
21. *Guo B. Y.* Jacobi spectral approximation and its applications to differential equations on the half line // *Journal of Computational Mathematics.* – 2000. – P. 95–112.
22. *Hajimohammadi Z., Baharifard F., Parand K.* A new numerical learning approach to solve general Falkner — Skan model // *Engineering with Computers.* – 2022. – P. 1–17.
23. *Hayat T., Hussain Q., Javed T.* The modified decomposition method and Padé approximants for the MHD flow over a non-linear stretching sheet // *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* – 2009. – P. 966–973.

24. *Ishak A., Nazar R., Pop I.* MHD boundary-layer flow of a micropolar fluid past a wedge with constant wall heat flux // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2009. – P. 109–118.
25. *Kudenatti R. B., Kirsur S. R., Achala L., Bujurke N.* Exact solution of two-dimensional MHD boundary layer flow over a semi-infinite flat plate // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2013. – P. 1151–1161.
26. *Kuo B. L.* Application of the differential transformation method to the solutions of Falkner-Skan wedge flow // *Acta Mechanica*. – 2003. – P. 161–174.
27. *Liao S. J.* A uniformly valid analytic solution of two-dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1999. – P. 101–128.
28. *Liu C., Zhub S.* Laguerre pseudospectral approximation to the Thomas-Fermi equation // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2015. – P. 251–261.
29. *Naseri R., Malek A., Gorder R. A. V.* On existence and multiplicity of similarity solutions to a nonlinear differential equation arising in magnetohydrodynamic Falkner-Skan flow for decelerated flows // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2015. – P. 4272–4278.
30. *Parand K., Abbasbandy S., Kazem S., Rezaei A. R.* Comparison between two common collocation approaches based on radial basis functions for the case of heat transfer equations arising in porous medium // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2011. – P. 1396–1407.
31. *Parand K., Rezaei A. R., Ghaderi S. M.* An approximate solution of the MHD Falkner-Skan flow by Hermite functions pseudospectral method // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2011. – P. 274–283.
32. *Salehi F., Baharifard F., Hossayni S. A., Parand K.* Exact operational matrices for rational Bernstein polynomials and its application for solving MHD problems // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2022. – P. 1–20.
33. *Schlichting H.* *Boundary Layer Theory*, 6th edition. – McGraw-Hill, New York, 1979.
34. *Sharma R., Ishak A., Pop I.* Stability analysis of magnetohydrodynamic stagnation-point flow toward a stretching/shrinking sheet // *Computers & Fluids*. – 2014. – P. 94–98.
35. *Stegun I., Abramowitz M.* *Handbook of Mathematical Functions*. – Dover, New York, 1968.
36. *Sutton G., Sherman A.* *Engineering Magnetohydrodynamics*. – McGrawHill, New York, 1965.
37. *Szegö G.* *Orthogonal Polynomials*, 4th edition. – American Mathematical Society Colloquium Publications, 1975.
38. *Waqas H., Khan S. U., Imran M., Bhatti M. M.* Thermally developed Falkner–Skan bioconvection flow of a magnetized nanofluid in the presence of a motile gyrotactic microorganism: Buongiorno nanofluid model. – *Physica Scripta*, 2019.
39. *Yih K.* MHD forced convection flow adjacent to a non-isothermal wedge // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. – 1999. – P. 819–827.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА — КИПРИЯНОВА ПО ВСЕМ ПЛОСКОСТЯМ, ПРОХОДЯЩИМ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ

В. А. Калитвин^{1,2}, М. Г. Лапшина¹

¹Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского

²Российская академия народного хозяйства и
государственной службы при Президенте Российской Федерации

Аннотация. Преобразование Радона находит свое применение при решении различных прикладных задач, среди которых важную роль играют вопросы компьютерной томографии. Обобщением преобразования Радона является преобразование Радона — Киприянова (K_γ) введенное в 1998 г. При проведении исследований с применением преобразования Радона — Киприянова необходимо ввести двойственное к нему преобразование. В данной работе рассматриваются свойства общего оператора, двойственного к преобразованию Радона — Киприянова.

Ключевые слова: преобразование Радона — Киприянова, преобразование двойственное к преобразованию Радона — Киприянова, преобразование Фурье — Бесселя, оператор Пуассона, обобщенная свертка.

Введение

В данной работе рассматривается преобразование Радона специального вида, введенное в работе И. А. Киприянова и Л. Н. Ляхова [1]:

$$K_\gamma[f](\theta; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_x^\gamma \delta(p - \langle x, \theta \rangle) (x')^\gamma dx,$$

где $\mathcal{P}_x^\gamma$ ($\gamma_i > 0$) — многомерный оператор Пуассона [2]:

$$\mathcal{P}_x^\gamma g(x) = C(\gamma) \int_0^\pi \dots \int_0^\pi g(x_1 \cos \alpha_1, x_2 \cos \alpha_2, \dots, x_m \cos \alpha_m, x'') \prod_{i=1}^m \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i d\alpha,$$

$$C(\gamma) = \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad d\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_m.$$

Введем обозначения

$$x = (x', x'') \in \mathbb{R}_n^+ = \mathbb{R}_m^+ \times \mathbb{R}_{n-m}, \quad \mathbb{R}_m^+ = \{x' : x_1 > 0, \dots, x_m > 0\}, \quad 1 \leq m \leq n,$$

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m), \quad \gamma_i > 0, i = 1, \dots, m, \quad (x')^\gamma = \prod_{i=1}^m x_i^{\gamma_i},$$

где $\delta(P(x))$ — обобщенная дельта функция Дирака, сосредоточенная на поверхности $P(x) = 0$ в $\mathbb{R}_n$, $\langle x, \theta \rangle$ — скалярное произведение n -мерных векторов, θ — единичный вектор нормали к гиперплоскости, являющийся внешним по отношению к полупространству $\langle x, \theta \rangle < p$.

Это преобразование может быть записано в виде *специального (весового) преобразования Радона* $\mathbb{R}_{n+2m}^+$ [1, 2]:

$$K_\gamma[f](\tilde{\theta}; p) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(z) \delta(p - \langle z, \tilde{\theta} \rangle) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} dz = C(\gamma) \int_{\{p=\langle z, \tilde{\theta} \rangle\}^+} \tilde{f}(z) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} d\Gamma(z), \quad (1)$$

$$z = (z_1, z_2, x'') = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}, x''),$$

$$\mathbf{z}_1 = (z_1, z_3, \dots, z_{2n-1}), \mathbf{z}_2 = (z_2, z_4, \dots, z_{2n}).$$

Здесь интегрирование происходит по части плоскости $\{p = \langle z, \tilde{\Theta} \rangle\}^+$, определенную неравенствами $z_{2i} > 0$, где единичный вектор нормали $\Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \dots, \theta_m, 0, \theta'') \in \mathbb{R}_{n+2m}^+$ перпендикулярен координатным осям $0z_{2i}$. Здесь и далее $C(\gamma)$ — константа, нормирующая интегральный оператор Пуассона.

Полуплоскость интегрирования в выражении (1) определяется равенством

$$\Theta_{\perp}^+ = \{z : \langle \Theta, z \rangle = p, z_{2i} > 0\} \in \overline{\mathbb{R}_{n+2m}^+}.$$

Заметим, что координаты z_{2i} не входят в уравнение плоскости $\Theta_{\perp}^+$, но являются переменными точками этой плоскости.

Если вектор Θ фиксирован, то будем использовать обозначение

$$K_{\gamma}[f](\Theta; p) = K_{\gamma, \Theta}[f](p).$$

Также, как в работе [5], преобразование Радона — Киприянова запишем в виде интеграла по полуплоскости $\Theta_{\perp}^+$ в евклидовом пространстве точек $\in \mathbb{R}_{n+2m}^+$:

$$K_{\gamma, \Theta}[f](p) = C(\gamma) \int_{\Theta_{\perp}^+} \tilde{f}(p\Theta + z) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} d\Gamma(z). \quad (2)$$

Здесь интегрирование по переменным z_2 может рассматриваться как преобразование Меллина.

1. Двойственное преобразование

Функции $f(x')$, определенные в пространстве $\mathbb{R}_n^+$, будем называть x_i -четными по Киприянову (или x_i -четными), если они допускают четное продолжение с сохранением класса гладкости.

Функцию x_i -четную по каждой координате вектора $x' = (x_1, \dots, x_n)$ будем называть x' -четной по Киприянову (или x' -четной функцией).

Пусть функции $f = f(z)$ и $g = g(z)$ принадлежат подпространству $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ основных функций Л. Шварца, состоящему из x' -четных по Киприянову функций. Функция (2) является функцией одного переменного p , поэтому позволяет ввести линейную форму в $\mathbb{R}_1$ следующего вида:

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_1} \int_{\Theta_{\perp}^+} \tilde{f}(p\Theta + z) g(p) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} d\Gamma(z) dp. \quad (3)$$

Введем новую переменную

$$y = p\Theta + z \in \overline{\mathbb{R}_{n+2m}^+} = \{y = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, x'') : z_{2i} \geq 0\}.$$

Согласно нашему построению, векторы Θ и z ортогональны: $\langle \Theta, z \rangle = 0$ и учитывая отсутствие координат z_{2i} в скалярном произведении векторов Θ и z , получим

$$\langle y, \Theta \rangle = p\Theta^2 + \langle z, \Theta \rangle = p,$$

где

$$\Theta = (\Theta_1, 0, \Theta_2, 0, \dots, \Theta_m, 0, \Theta'') \quad |\Theta| = 1,$$

так как, по построению $\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \dots + \Theta_m^2 + |\Theta''|^2 = 1$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp &= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(y) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(y) \mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^{\#}[g](y) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Преобразование

$$\mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^{\#}[g](y) = C(\gamma)g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle)$$

называется *двойственным преобразованием Радона — Киприянова* в $\mathbb{R}_{n+2m}^+$.

Введем следующее преобразование координат $y_i \in \mathbb{R}_{n+2m}^+$ ($i = 1, \dots, m$)

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{2i-1} = x_i \cos \alpha_i, \quad 0 < \alpha_i < \pi, \\ z_{2i} = x_i \sin \alpha_i, \quad x_i > 0 \\ x' = x' \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = (z_1, z_2, x'') \rightarrow \\ \rightarrow \{x : (x', x''), x' = x_1, x_2, \dots, x_m > 0\} = x \in \mathbb{R}_n^+ \end{array} \quad (5)$$

Напомним, что первоначальные координаты у нас возникли в результате вращения осей координат, при котором оси Ox_{2i-1} совпали с направлением перпендикуляра к плоскости интегрирования. Учитывая равенство $f(x', x'') = \tilde{f}(z)$ и (4), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \theta}[f](p)g(p)dp &= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(y)g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} dy = \\ &= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{z_{2m-1}^2 + z_{2m}^2}, \tau\right) \times \\ &\times g\left(\Theta, x_1 \theta_1 \cos \alpha_1 + x_2 \theta_2 \cos \alpha_2 + \dots + x_m \theta_m \cos \alpha_m + x_{m+1} \theta_{m+1} + \dots + x_n \theta_n \theta\right) \times \\ &\times \prod_{i=1}^m \sin^{2\gamma_i} \alpha_i (t)^{\gamma} dx, \end{aligned}$$

где

$$(x')^{\gamma} = \prod_{i=1}^m x_i^{\gamma_i}, \quad dx = dx' dx''.$$

Согласно определения многомерного оператора Пуассона, получим следующее представление линейной формы (3):

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \theta}[f](p)g(p)dp = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_x^{\gamma} g(\theta, \langle x, \theta \rangle) (x')^{\gamma} dx' dx''.$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 1. Для функций $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$ справедливы равенства

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \theta}[f](p)g(p)dp = \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(y) \mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^{\#}[g](y) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} dy = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{K}_{\gamma, \theta}^{\#} g(x) (x')^{\gamma} dx' dx'', \quad (6)$$

первое из которых выполняется в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{n+2m}^+$ (в результате вращения (5) с двойственным оператором

$$\mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^{\#}[g](y) = C(\gamma)g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle), \quad y \in \mathbb{R}_{n+2m}^+, \quad \Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \dots, \theta_m, 0, \theta''), \quad (7)$$

а второе справедливо в исходном евклидовом полупространстве $\mathbb{R}_n^+$ с двойственным оператором

$$\mathcal{K}_{\gamma, \theta}^{\#} g(x) = \mathcal{P}_{x_1}^{\gamma} (g(\theta, \langle \theta, x \rangle)). \quad (8)$$

В теореме 1 определены виды одномерных двойственных операторов Радона — Киприянова.

Оператор, двойственный к преобразованию Радона — Киприянова в $\mathbb{R}_n$ определим интегрированием по взвешанной сфере в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$. Тогда

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma}[f](\theta, p)g(p)dp \theta_1^{\gamma} dS(\theta) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{K}_{\gamma}^{\#} g(x) (x')^{\gamma} dx' dx'',$$

$$\mathcal{K}_{\gamma}^{\#} g(x) = \int_{S_1^+(n)} g(\Theta, \langle \Theta, x \rangle) \Theta^{\gamma} dS,$$

где $x = (x', x'')$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, $(x')^{\gamma} = \prod_{i=1}^m x_i^{\gamma_i}$,

$$\mathcal{K}_\gamma^\# g(x) = \int_{S_1^+(n)} K_{\gamma,\theta}^\# g(x) (x')^\gamma dx = \int_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_{x'}(g(\theta, \langle \theta, x \rangle)) (\theta')^\gamma dS(\theta), \quad \text{где} \quad (\theta')^\gamma = \prod_{i=1}^m \theta_i^{\gamma_i}. \quad (9)$$

Доказательство. Согласно равенству (6), имеем

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp (\theta')^\gamma dS(\theta) = \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma,\theta}^\# g(x) (x')^\gamma dx' dx'' dS(\theta),$$

Теперь воспользуемся определением оператора $K_{\gamma,\theta}^\#$ формулой (8). Тогда

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp (\theta')^\gamma dS(\theta) = \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x'}^\gamma(g(\theta, \langle \theta, x \rangle)) dx' dx'' dS(\theta).$$

Изменение порядка интегрирования здесь возможно, так как рассматриваемые функции f и g принадлежат пространству Л. Шварца. Поменяв порядок интегрирования, получим утверждение доказываемой теоремы.

Отметим, что двойственный оператор $\mathcal{K}_\gamma^\#$ получен дополнительным интегрированием функции $K_{\gamma,\theta}^\# g(x)$ по полусфере $S_1^+(n)$, поэтому не зависит от вектора нормали к плоскости. Этим отличается от $K_{\gamma,\theta}^\#$ — двойственному преобразованию Радона — Киприянова в $\mathbb{R}_n^+$ (первое из равенств в (1) и от оператора $\mathcal{K}_{\gamma,\Theta}^\#$ — двойственного к преобразованию Радона — Киприянова, полученного вращением, которое приводит к интегрированию по $\mathbb{R}_{n+2m}^+$ (второе из равенств в (1)).

Литература

1. Киприянов И. А. О преобразованиях Фурье, Фурье — Бесселя и Радона / И. А. Киприянов, Л. Н. Ляхов // Докл. АН СССР. – 1998. – 360. – № 2. – С. 157–160.
2. Ляхов Л. Н. Преобразование Киприянова — Радона / Л. Н. Ляхов // Тр. МИАН. – 2005. – Т. 248. – С. 153–163.
3. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б. М. Левитан // УМН. – 1951. – Т. 6, № 2. – С. 102–143.
4. Наттерер Ф. Математические основы компьютерной томографии / Ф. Наттерер. – М. : Мир. – 1990.
5. Kalitvin V. A. Radon — Kipriyanov Transform of Laplace Series by Weight Spherical Functions / V. A. Kalitvin, M. G. Lapshina // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, No 8. – P. 3323–3330.
6. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. – М. : Наука. – 1997.

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В. Г. Курбатов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Показано, что если каждому ограниченному входу достижимой и наблюдаемой динамической системы соответствует единственный ограниченный выход, то матрица системы не имеет собственных значений на мнимой оси.

Ключевые слова: задача об ограниченных решениях, динамическая система, достижимость, наблюдаемость, матричная экспонента.

Введение

Задача об ограниченных решениях для дифференциальных уравнений изучалась многими авторами, см., например [1]. Она состоит в нахождении ограниченного на R решения x дифференциального уравнения

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in R.$$

Хорошо известно [1, с. 119, теорема 4.1], что для существования единственного ограниченного решения x при любом непрерывном ограниченном свободном члене f необходимо и достаточно, чтобы спектр матрицы A не пересекал с мнимую ось.

В докладе рассматривается более общий объект — динамическая система

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Dx(t),$$

где A, B, C, D — заданные постоянные матрицы, согласованных размеров. Устанавливается, что если динамическая система достижима и наблюдаема, и каждому ограниченному входу u соответствует единственный ограниченный выход y , то спектр матрицы A не пересекает мнимую ось.

Линейные стационарные непрерывные динамические системы

Символом $C^{p \times q}$ будем обозначать множество всех матриц размера $p \times q$, состоящих из комплексных чисел. По умолчанию будем считать, что векторы из C^k записываются в виде столбцов.

Динамической системой называют [2, 3] правило, преобразующее входной сигнал u в выходной сигнал y . Предполагается, что

$$u: R \rightarrow C^q, \quad y: R \rightarrow C^p.$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда u — непрерывная функция.

Будем предполагать, что зависимость y от u задается уравнениями

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Dx(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B, C, D — заданные постоянные матрицы, согласованных размеров:

$$A \in C^{n \times n}, \quad B \in C^{n \times q}, \quad C \in C^{p \times n}, \quad D \in C^{p \times q}.$$

Достижимость

Состояние $x_1 \in C^k$ называют *достижимым*, если существуют такой момент времени $T > 0$ и такой вход $u \in C[0, T]$, что

$$x_1 = \varphi(T, 0, 0, u),$$

где $\varphi(t, t_0, x_0, u)$ — значение в точке t решения начальной задачи

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Подпространством достижимости называют подмножество $X_{reac} \subseteq C^n$, состоящее из всех достижимых состояний x_1 . Нетрудно видеть, что подмножество X_{reac} действительно является линейным подпространством пространства C^n . Систему (1) называют *(полностью) достижимой*, если $X_{reac} = X$.

Наблюдаемость

Задача наблюдения для системы (1) состоит в восстановлении начального состояния x_0 при известном управлении u по значениям выхода y . Исследование задачи наблюдения сводится к рассмотрению задачи

$$x'(t) = Ax(t),$$

$$y(t) = Cx(t),$$

$$x(t_0) = x_0.$$

(Начальное) состояние $x_0 \in C^n$ называют *ненаблюдаемым*, если $y(t) = 0$ при $t > 0$. *Подпространством ненаблюдаемости* называют множество всех ненаблюдаемых состояний. Его обозначают символом X_{unobs} . Нетрудно видеть, что подмножество $X_{unobs} \subseteq C^n$ действительно является подпространством.

Систему называют *(полностью) наблюдаемой*, если $X_{unobs} = \{0\}$.

Задача об ограниченных решениях для достижимой и наблюдаемой системы

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть система (1) полностью достижима и полностью наблюдаема. Пусть каждому непрерывному ограниченному входу u соответствует единственный ограниченный выход y . Тогда у матрицы A нет точек спектра на мнимой оси.

Литература

1. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн // Нелинейный анализ и его приложения. – М. : Наука, 1970.
2. Antoulas A. C. Approximation of large-scale dynamical systems / A. C. Antoulas. Philadelphia // PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). – 2005. – Vol. 6 of Advances in Design and Controlxxvi+479 p.
3. Polderman J. W. Introduction to mathematical systems theory. A behavioral approach / J. W. Polderman, J. C. Willems. – New York : Springer-Verlag, 1998. – Vol. 26 of Texts in Applied Mathematics. xxx+424 p.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ ЛАНЧЕСТЕРА

Д. А. Литвинов, Л. Ю. Кабанцова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается модель боевых действий Ланчестера в виде дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. Ставится задача по нахождению математического ожидания решения. Получены явные формулы для первой моментной функции решения стохастической системы. В частности, рассмотрен случай независимых гауссовских коэффициентов.

Ключевые слова: модель Ланчестера, вариационная производная, характеристический функционал, моментные функции, гауссов случайный процесс.

Ланчестером [1] была предложена математическая модель противоборствующих сторон в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -\varepsilon_1(t)x - \varepsilon_2(t)y + f_1(t), \\ \dot{y} = -\varepsilon_3(t)x - \varepsilon_4(t)y + f_2(t), \end{cases}$$

где $x(t), y(t)$ описывают численность армий в момент времени t , f_1, f_2 определяют изменение армий в связи с пополнениями, а коэффициенты $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ суть функции, характеризующие боевые и небоевые потери. Если коэффициенты $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ не зависят от времени, то есть являются заданными числами, то система интегрируется в квадратурах. Имеется возможность либо аналитически анализировать ход боевых действий, либо построить фазовые траектории на фазовой плоскости. Данные подходы описаны в [2, 3]. Для более реалистичных предсказаний считают, что коэффициенты являются случайными процессами. Вывод уравнения для моментных функций через плотности вероятностей можно найти, например, в [4].

В данной работе находится явный вид первой моментной функции при условии, что задан характеристический функционал случайных процессов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим стохастическую модель боевых действий Ланчестера вида

$$\begin{cases} \dot{x} = -\varepsilon_1(t)x + f(t), \\ \dot{y} = -\varepsilon_2(t)x, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \quad (1.2)$$

где x_0, y_0 — заданные случайные величины, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$ — случайные процессы. Под функциями $x(t), y(t)$ подразумеваются зависимости численностей армий от времени. Полагается, что $\varepsilon_1(t)$ характеризует небоевые потери армии X , $\varepsilon_2(t)$ — потери армии Y от действий армии X , а $f(t)$ описывает процесс пополнения численности X .

Пусть случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$ заданы характеристическим функционалом [5, стр. 30] вида

$$\Psi(u_1, u_2, v) = E \left[\exp \left\{ i \int_T (\varepsilon_1(s)u_1(s) + \varepsilon_2(s)u_2(s) + f(s)v(s)) ds \right\} \right], \quad (1.3)$$

где i — мнимая единица, $T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ — отрезок вещественной прямой, символ E обозначает математическое ожидание, а $u_1(t), u_2(t), v(t)$ представляют собой суммируемые функции пространства $L_1(T)$. Будем считать, что случайные величины x_0, y_0 не зависят от процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$.

Систему (1.1)–(1.2) принято сводить к детерминированной системе [6, 7]. Обозначим через $T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ отрезок вещественной прямой и введем вспомогательную функцию

$$W(u_1, u_2, v) = \exp \left\{ i \int_T (\varepsilon_1(s)u_1(s) + \varepsilon_2(s)u_2(s) + f(s)v(s)) ds \right\}. \quad (1.4)$$

Определим отображения $z_1(t, u_1, u_2, v) = E[x(t)W(u_1, u_2, v)]$ и $z_2(t, u_1, u_2, v) = E[y(t)W(u_1, u_2, v)]$. Тогда стохастическую систему (1.1)–(1.2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} = i \frac{\delta z_1}{\delta u_1(t)} - i \frac{\delta \Psi}{\delta v(t)}, \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} = i \frac{\delta z_1}{\delta u_2(t)}, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} z_1(t_0, u_1, u_2, v) &= E[x_0 W(u_1, u_2, v)], \\ z_2(t_0, u_1, u_2, v) &= E[y_0 W(u_1, u_2, v)]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

При этом связь решений полученной модели (1.5)–(1.6) и исходной (1.1)–(1.2) выражается соотношениями:

$$\begin{aligned} z_1(t, 0, 0, 0) &= E[x(t)], \\ z_2(t, 0, 0, 0) &= E[y(t)]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\chi(\tau) = \chi(t_0, t, \tau)$, определяемую следующим образом: если τ принадлежит отрезку $[\min\{t_0, t\}, \max\{t_0, t\}]$, то $\chi(\tau) = \text{sign}(\tau - t_0)$, иначе $\chi(\tau) = 0$. График функции $\chi(\tau)$ представлен на рис. 1.

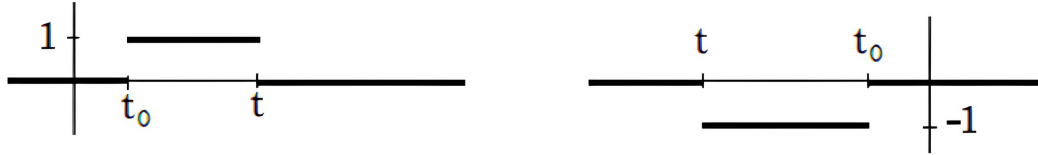


Рис. 1. График функции $\chi(\tau) = \chi(t_0, t, \tau)$

Сформулируем лемму для нахождения решения детерминированной модели.

Лемма 1. Пусть x_0, y_0 являются случайными величинами, независимыми от процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$.

Пусть существуют вариационные производные $\frac{\delta \Psi(u_1, u_2, v)}{\delta u_1(t)}$, $\frac{\delta \Psi(u_1, u_2, v)}{\delta u_2(t)}$, $\frac{\delta \Psi(u_1, u_2, v)}{\delta v(t)}$,

$\frac{\delta^2 \Psi(u_1, u_2, v)}{\delta u_1(t) \delta v(t)}$, $\frac{\delta^2 \Psi(u_1, u_2, v)}{\delta u_2(t) \delta v(t)}$, тогда решение системы (1.5)–(1.6) имеет вид

$$z_1(t, u_1, u_2, v) = E[x_0] \Psi(u_1 + i\chi(t_0, t), u_2, v) - i \int_{t_0}^t \frac{\delta \Psi(u_1 + i\chi(s, t), u_2, v)}{\delta v(s)} ds, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} z_2(t, u_1, u_2, v) &= E[y_0] \Psi(u_1, u_2, v) + iE[x_0] \int_{t_0}^t \frac{\delta \Psi(u_1 + i\chi(t_0, s), u_2, v)}{\delta u_2(s)} ds + \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \frac{\delta^2 \Psi(u_1 + i\chi(\sigma, s), u_2, v)}{\delta u_2(s) \delta v(\sigma)} d\sigma ds. \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Общее решение задачи

Сформулируем теоремы о виде математических ожиданий функций $x(t), y(t)$ решения исходной стохастической системы (1.1)–(1.2).

Теорема 1. Пусть x_0, y_0 суть случайные величины, независимые от процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$. Пусть существуют вариационные производные $\frac{\partial \Psi(u_1, u_2, v)}{\delta u_1(t)}$, $\frac{\partial \Psi(u_1, u_2, v)}{\delta u_2(t)}$, $\frac{\partial \Psi(u_1, u_2, v)}{\delta v(t)}$, $\frac{\delta^2 \Psi(u_1, u_2, v)}{\delta u_1(t) \delta v(t)}$, $\frac{\delta^2 \Psi(u_1, u_2, v)}{\delta u_2(t) \delta v(t)}$, тогда математические ожидания $E[x(t)]$, $E[y(t)]$ решений $x(t), y(t)$ системы (1.1)–(1.2) определяются следующим образом:

$$E[x(t)] = E[x_0] \Psi(i\chi(t_0, t), 0, 0) - i \int_{t_0}^t \frac{\partial \Psi(i\chi(s, t), 0, 0)}{\delta v(s)} ds, \quad (2.1)$$

$$E[y(t)] = E[y_0] + iE[x_0] \int_{t_0}^t \frac{\partial \Psi(i\chi(t_0, s), 0, 0)}{\delta u_2(s)} ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \frac{\delta^2 \Psi(i\chi(\sigma, s), 0, 0)}{\delta u_2(s) \delta v(\sigma)} d\sigma ds. \quad (2.2)$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$ являются независимыми. Если случайный процесс ε_1 описывается характеристическим функционалом $\Psi_1(u) = E \left[\exp \left\{ i \int_T \varepsilon_1(s) u(s) ds \right\} \right]$, а для случайных процессов ε_2, f известны их математические ожидания, то математические ожидания $E[x(t)]$, $E[y(t)]$ решений $x(t), y(t)$ системы (1.1)–(1.2) имеют вид

$$E[x(t)] = E[x_0] \Psi_1(i\chi(t_0, t)) + \int_{t_0}^t \Psi_1(i\chi(s, t)) E[f(s)] ds, \quad (2.3)$$

$$E[y(t)] = E[y_0] - E[x_0] \int_{t_0}^t \Psi_1(i\chi(t_0, s)) E[\varepsilon_2(s)] ds - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \Psi_1(i\chi(\sigma, s)) E[\varepsilon_2(s)] E[f(\sigma)] d\sigma ds. \quad (2.4)$$

3. Задача с независимыми гауссовскими коэффициентами

Найдем вид математического ожидания решения задачи (1.1)–(1.2) для случая независимых гауссовских коэффициентов.

Теорема 3. Пусть заданы независимые гауссовские случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$ и случайный процесс ε_1 задан функционалом

$$\Psi_1(u) = \exp \left\{ i \int_T E[\varepsilon_1(s)] u(s) ds - \frac{1}{2} \int_T \int_T \text{cov}(s_1, s_2) u(s_1) u(s_2) ds_1 ds_2 \right\},$$

где $\text{cov}(s_1, s_2)$ — ковариационная функция случайного процесса ε_1 . Если известны математические ожидания случайных процессов ε_2, f , то

$$E[x(t)] = E[x_0] \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \text{cov}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 - \int_{t_0}^t E[\varepsilon_1(s)] ds \right\} +$$

$$+ \int_{t_0}^t \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t \text{cov}(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 - \int_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)] d\sigma \right\} E[f(s)] ds, \quad (3.1)$$

$$E[y(t)] = E[y_0] - E[x_0] \int_{t_0}^t \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_0}^s \int_{t_0}^s \text{cov}(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 - \int_{t_0}^s E[\varepsilon_1(\sigma)] d\sigma \right\} E[\varepsilon_2(s)] ds -$$

$$- \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{\sigma}^s \int_{\sigma}^s \text{cov}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \int_{\sigma}^s E[\varepsilon_1(\tau)] d\tau \right\} E[\varepsilon_2(s)] E[f(\sigma)] d\sigma ds \quad (3.2)$$

Заключение

В результате проведенной работы получены явные формулы для первой моментной функции решения задачи (1.1)–(1.2). Рассмотрены случаи как зависимых, так и независимых случайных процессов. Также найдены формулы математического ожидания задачи (1.1)–(1.2) в случае независимых гауссовских случайных процессов.

Литература

1. *Lanchester F. Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm.* / F. Lanchester – London : Constable and Co, 1916. – 243 p.
2. *Вентцель Е. С. Введение в исследование операций: учебное пособие* / Е. С. Вентцель – Москва : Издательство «Советское радио», 1964. – 384 с.
3. *Гордин В. А. Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решать: учебное пособие* / В. А. Гордин – Москва : Издательский дом Высшей школы экономики, 2016. – 531 с.
4. *Чуев В. Ю. Вероятная модель боя многочисленных группировок* / В. Ю. Чуев // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. Спец. вып. «Матем. Модел.» – 2011. – С. 223–232.
5. *Задорожний В. Г. Методы вариационного анализа: учебное пособие* / В. Г. Задорожний. – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 316 с.
6. *Задорожний В. Г. Дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами: учебное пособие* / В. Г. Задорожний – Воронеж, Издательско-полиграфический центр Воронежского Государственного университета, 2012. – 98 с.
7. *Задорожний В. Г. Стохастическая модель боевых действий Ланчестера* / В. Г. Задорожний, А. С. Чеботаев, Е. Е. Дикарев // Матем. моделирование. – 2021. – Т. 33, № 5. – С. 57–77.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ

Е. А. Логинова, А. С. Черникова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе изучаются свойства первых производных решения стационарной неоднородной задачи теплопроводности на плоскости с трещиной конечной длины. Используя интегральное представление решения задачи, удается вычислить первые производные решения, заданные также интегрально. Каждый тепловой поток рассматривается отдельно. Постепенно изучаются все слагаемые, входящие в интегральное представление теплового потока, и оцениваются, и отбрасываются непрерывные компоненты. Таким образом, строится асимптотическое представление по расстоянию до концов трещины каждого теплового потока.

Ключевые слова: задача теплопроводности, тепловые потоки, интегральное представление решения, асимптотические представления, первые производные решения, задача математической физики, неоднородная задача, стационарная задача, асимптотики тепловых потоков, краевая задача.

Введение

Рассматривается неоднородная задача о распределении тепла в плоскости (неоднородном материале) с трещиной. Предполагается, что вектор изменения неоднородности материала направлен под углом $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ к положительному направлению оси Ox_1 , а трещина занимает отрезок $[-1; 1]$ оси Ox_1 .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + k \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + k \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_1, x_2), \quad (1)$$

$$u(x_1; +0) - u(x_1; -0) = q_0(x_1), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x_1; +0)}{\partial x_2} + k \sin \alpha u(x_1; +0) - \frac{\partial u(x_1; -0)}{\partial x_2} - k \sin \alpha u(x_1; -0) = q_1(x_1), \quad (3)$$

где $f(x_1, x_2)$, $q_0(x_1)$, $q_1(x_1)$ — известные функции.

Основным результатом исследования явилась теорема.

Теорема. Пусть функции $q_0(x_1)$, $q_1(x_1)$ дважды непрерывно дифференцируемы на множестве $[-1; 1]$ и $f(x) = f(x_1, x_2)$ ограничена вместе со своими производными до второго порядка включительно в R^2 , кроме того, $f(x_1, x_2) = 0$ при $|x_1| \geq c$, $|x_2| \geq c_1$, где c, c_1 — произвольные конечные положительные числа.

Тогда справедливы следующие асимптотические представления первых производных решения задачи (1)–(3) (тепловых потоков) по расстоянию до границы трещины

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} = & -(4\pi)^{-1} [\ln((1-x_1)^2 + x_2^2) q_1(1) - \ln((1+x_1)^2 + x_2^2) q_1(-1)] + k \sin \alpha (8\pi)^{-1} [\ln((1-x_1)^2 + x_2^2) q_0(1) - \\ & - \ln((1+x_1)^2 + x_2^2) q_0(-1)] - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x_2}{(1-x_1)^2 + x_2^2} q_0(1) - \frac{x_2}{(1+x_1)^2 + x_2^2} q_0(-1) \right] + R_1(x_1, x_2). \quad (4) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = & -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1-x_1}{(1-x_1)^2 + x_2^2} q_0(1) + \frac{1+x_1}{(1+x_1)^2 + x_2^2} q_0(-1) \right] + \frac{k \cos \alpha}{8\pi} [\ln((1-x_1)^2 + x_2^2) q_0(1) - \\ & - \ln((1+x_1)^2 + x_2^2) q_0(-1)] + R_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

$$-\ln((1+x_1)^2+x_2^2)q_0(-1)]+\frac{1}{4\pi}[\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q'_0(1)-\ln((-1-x_1)^2+x_2^2)q'_0(-1)]+R(x_1,x_2). \quad (5)$$

Здесь функции $R(x_1, x_2)$, $R_1(x_1, x_2)$ ограничены при $x_2 \rightarrow +0$, $x_1 \in [-1; 1]$.

1. Построение решения задачи (1)–(3) и описание его свойств

Ранее было доказано утверждение [1].

Утверждение. Пусть функции $q_0(x_1)$, $q_1(x_1)$ дважды непрерывно дифференцируемы на множестве $[-1; 1]$ и $f(x) = f(x_1, x_2)$ ограничена вместе со своими производными до второго порядка включительно в R^2 , кроме того, $f(x_1, x_2) = 0$ при $|x_1| \geq c$, $|x_2| \geq c_1$, где c, c_1 — произвольные конечные положительные числа.

Тогда задача (1)–(3) имеет решение, выписываемое равенством

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + (x_2 - y_2) \sin \alpha)\right) \times \\ & \times K_0\left(\frac{k}{2} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)\right) K_0\left(\frac{k}{2} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right) q_1(y_1) dy_1 + \\ & + \frac{k}{4\pi} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)\right) K_1\left(\frac{k}{2} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right) \frac{x_2 q_0(y_1)}{\sqrt{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2}} dy_1 + \\ & + \frac{k \sin \alpha}{4\pi} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)\right) K_0\left(\frac{k}{2} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right) q_1(y_1) dy_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где K_0 , K_1 — функции Макдональда — Бесселя [1], выполняются граничные условия (2)–(3). При этом условие (3) выполнено в смысле главного значения.

Функция $u(x_1, x_2)$ дважды непрерывно дифференцируема в R^2 , за исключением точек разреза.

2. Асимптотические представления тепловых потоков

Приведём схему доказательства Теоремы.

Используя представление решения (6), легко вычислить производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} = & \frac{k \cos \alpha}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + (x_2 - y_2) \sin \alpha)\right) \times \\ & \times K_0\left(\frac{k}{2} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 + \\ & + \frac{k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + (x_2 - y_2) \sin \alpha)\right) \times \\ & \times K_1\left(\frac{k}{2} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) \frac{(x_1 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 + \\ & + \frac{k \cos \alpha}{4\pi} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)\right) K_0\left(\frac{k}{2} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right) q_1(y_1) dy_1 + \\ & + \frac{k}{4\pi} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)\right) K_1\left(\frac{k}{2} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right) \frac{(x_1 - y_1)}{\sqrt{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2}} q_1(y_1) dy_1 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k^2 \cos \alpha}{4\pi} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)\right) K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right) \frac{x_2 q_0(y_1)}{\sqrt{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2}} dy_1 - \\
& -\frac{k^2}{16\pi} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)\right) \left(K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right) + K_2\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right) \right) \times \\
& \times \frac{(x_1 - y_1)x_2}{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2} q_0(y_1) dy_1 - \frac{k}{4\pi} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)\right) K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right) \times \\
& \times \frac{(x_1 - y_1)x_2}{\left(x_2^2 + (x_1 - y_1)^2\right)^{3/2}} q_0(y_1) dy_1 - \frac{k^2 \cos \alpha}{8\pi} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)\right) \times \\
& \times K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right) q_1(y_1) dy_1 - \frac{k^2}{8\pi} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)\right) \times \\
& \times K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\right) \frac{(x_1 - y_1)}{\sqrt{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2}} q_1(y_1) dy_1.
\end{aligned}$$

Отметим, что слагаемые с третьего по девятое были изучены ранее в [2] и они вносят основной вклад в асимптотическое представление функции $\frac{\partial u}{\partial x_1}$.

Осталось показать, что первое и второе слагаемые являются ограниченными функциями. Первое слагаемое

$$\frac{k \cos \alpha}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + (x_2 - y_2) \sin \alpha)\right) K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2$$

с точностью до постоянного множителя совпадает с первым слагаемым в представлении (6), а, следовательно, является ограниченным.

Обозначим

$$\begin{aligned}
I &= \frac{k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + (x_2 - y_2) \sin \alpha)\right) \times \\
& \times K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) \frac{(x_1 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2.
\end{aligned}$$

Так как в силу условия теоремы $f(x_1, x_2) = 0$ при $|x_1| \geq c$, $|x_2| \geq c_1$, то существует $N > 0$, такое что

$$\begin{aligned}
I &= \frac{k}{4\pi} \int_{-N}^N \int_{-N}^N \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + (x_2 - y_2) \sin \alpha)\right) \times \\
& \times K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) \frac{(x_1 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2.
\end{aligned}$$

Используя асимптотические представления функций Макдональда — Бесселя при малых значениях аргумента [3], получим

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \int_{-N}^N \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1) \cos \alpha + (x_2 - y_2) \sin \alpha)\right) \times \\
& \times \frac{(x_1 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2} \times \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{k^2}{8\pi} \int_{-N}^N \int_{-N}^N \exp\left(-\frac{k}{2}((x_1 - y_1)\cos\alpha + (x_2 - y_2)\sin\alpha)\right) \times O(x_1 - y_1) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

Второе слагаемое в полученном представлении очевидно является ограниченным в окрестности трещины.

В ограниченности первого слагаемого можно убедиться, применяя оценку

$$\left| \frac{(x_1 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}} \right| \leq \left| \frac{(x_1 - y_1)}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2}} \right| = 1$$

и, в дальнейшем, интегрирование по частям.

Таким образом, доказано асимптотическое представление функции $\frac{\partial u}{\partial x_1}$.

Аналогично проводится доказательство для $\frac{\partial u}{\partial x_2}$.

Литература

1. *Логинова Е. А.* Неоднородная задача теплопроводности на плоскости с трещиной / Е. А. Логинова, А. С. Черникова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4-6 декабря 2023 г. – Воронеж, 2024. – С. 84–88.
2. *Глушко А. В.* Решение задач, описывающих распределение тепла в материале с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова. – Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2013. – 130 с.
3. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. – М. : Издательство иностранной литературы, 1949. – 799 с.

СРЕДНИЕ ФУНКЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫМ Т-СДВИГОМ

Л. Н. Ляхов^{1,2}, С. А. Рощупкин², Е. Л. Санина¹¹Воронежский государственный университет²Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Аннотация. В работе вводится усреднение функций на основе интегральной меры Лебега — Киприянова $d\mu_{-\gamma}(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}$, $0 < \gamma < 1$ и введенных ранее интегральных операторов обобщенного Т-псевдосдвига и обобщенного Т-сдвига. Последний принадлежит классу обобщенных сдвигов Б. М. Левитана.

Ключевые слова: средние функции, интегральные операторы обобщенного псевдосдвига и обобщенного сдвига.

Введение

Хорошо известно *усредняющее ядро* (например, см. книги [1] (с. 23), [2] (с. 34), [3] (с. 31))

$$\omega(x) = \begin{cases} C_h e^{-\frac{h^2}{h^2 - |x|^2}}, & |x| < h, \\ 0, & |x| \geq h, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad n \geq 1. \quad (1)$$

Свертка с этим ядром $(f * \omega_h)(x) = \int f(y) \omega_h(|x - y|) d\mu(y)$, где в качестве интегральной меры обычно рассматривается мера интегрирования Лебега $d\mu(y) = dy$ называется *средним функции* f .

В 70-х годах прошлого века И. А. Киприяновым было инициировано изучение *весовых средних функций* на основе меры интегрирования

$$d\mu(x) = x^\gamma dx, \quad x^\gamma = \prod_{i=1}^n |x_i|^{\gamma_i}, \quad \gamma_i \geq 0, \quad n \geq 1,$$

которая приспособлена для исследования задач уравнений с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя

$$B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma_i > 0.$$

Далее, для удобства, мы пользуемся перестановкой в записи аргумента функции:

$$x = (x_i, x^i), \quad x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (2)$$

Коммутирующий с оператором B_{γ_i} сдвиг

$$T_{x_i}^{\gamma_i} f(x_i, x^i) = \frac{\Gamma\left(\gamma_i + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha}, x^i\right) \sin^{\gamma_i-1} \alpha d\alpha \quad (3)$$

принадлежит классу обобщенных сдвигов Б. М. Левитана (см. [4], [5] (с. 17)) и называется *обобщенным сдвигом Пуассона*. Впервые, в качестве оператора сдвига аргумента функции, такая конструкция «сдвига» появилась в работах А. Ванштейна и Ж. Дельзарта в середине прошлого века. Принадлежность классу обобщенных сдвигов Левитана доказана в [4]. Доказательство коммутруемости с оператором Бесселя приведено в книге [6] и в более общем случае в [7].

В [4] отмечен следующий факт, имеющий принципиальное значение — выражение (3) симметрично относительно аргумента x и шага y .

Соответствующие свертки, порожденные обобщенным сдвигом (3), называют *обобщенными свертками*, а свертка f с усредняющим ядром — *весовыми средними функциями* f .

В [8] исследовались обобщенные средние функций, порожденные смешанным обобщенным сдвигом (обобщенный сдвиг (3) действовал только по одной переменной); обобщение для случая нескольких весовых координат аргумента функции см. в [9]. Средние функции, порожденные обобщенным сдвигом Пуассона, называются K -средними функциями (средние Киприянова). В указанных работах в качестве меры интегрирования принята следующая:

$$d\mu_\gamma(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dx, \text{ где } \gamma_i > 0.$$

В начале 80-х годов на одном из семинаров в ВГУ И. А. Киприянов предложил исследовать задачи с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя $B_\gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{-\gamma}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x}$ с параметром $-\gamma < 0$. В 2008 г. автор этой работы спросил профессора В. В. Катрахова о результатах этих исследований. Оказалось, что исследования были, но ничего не опубликовано. В. В. Катрахов отметил, что по его наблюдениям исследование задач с таким оператором Бесселя потребует введения принципиально нового математического аппарата по сравнению с известным в то время. Справедливость этого обнаружена в работе [10] при попытке найти фундаментальное решение оператора Лапласа — Бесселя, в котором хотя бы один из операторов Бесселя имел бы отрицательный параметр. Дело в том, что открытый в [10] интегральный оператор, коммутирующий с оператором Бесселя $B_{-\gamma}$ ($\gamma > 0$), и который должен бы сыграть роль «обобщенного сдвига», не принадлежит классу левитановских обобщенных сдвигов. Более того, он устроен настолько «неправильно», что посредством этого оператора невозможно определить его действие из начала координат или в начало координат. Тем самым невозможно определить фундаментальное решение сингулярного оператора Бесселя с соответствующей особенностью в произвольной точке, не совпадающей с началом координат.

Авторами [10] этот оператор назван « $\mathbb{T}$ -псевдосдвигом». И, по-видимому, его имел ввиду В. В. Катрахов, говоря о «новом математическом аппарате» для исследования сингулярных дифференциальных уравнений с отрицательным параметром оператора Бесселя. Действительно, на основе $\mathbb{T}$ -псевдосдвига уже в следующей работе [11] тех же авторов был введен оператор $\mathbb{T}$ -сдвига, который (с некоторыми оговорками) принадлежит классу обобщенных сдвигов Б. М. Левитана и коммутирует с оператором Бесселя $B_{-\gamma}$, $\gamma > 0$.

Надо отметить, что ещё более ранее описанных здесь событий, свертки функций с ядром, который в [10] назван $\mathbb{T}$ -псевдосдвигом, изучались А. В. Какичевым в [12] (см. также работу [13]). Однако внятного приложения в теории дифференциальных уравнений этот аппарат свертки дать не мог по указанной выше причине.

Исследования сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя отрицательного параметра также начаты в работах [14–16]. Особый интерес к этим исследованиям вызван результатами работы [15], где показано, что все работы с оператором Лапласа — Бесселя — Киприянова и с мерой интегрирования Лебега — Киприянова $d\mu(x) = \prod_i x_i^{\gamma_i}$, $\gamma_i > -1$ могут рассматриваться в дробноразмерном множестве с размерностью $n + |\gamma|$.

В этой работе исследуется новый класс весового усреднения функций на основе введенных в [10] и в [11] операторов обобщенного $\mathbb{T}$ -псевдосдвига и обобщенного $\mathbb{T}$ -сдвига.

1. Некоторые термины, обозначения и результаты

Через $\mathbb{R}_n^+$ обозначим область в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_n$, определенную неравенствами $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. И обозначаем $\mathbb{R}_n^+ = \{x : x_i \geq 0\}$. Класс ℓ раз непрерывно дифференцируемых функций, четных по каждой координате x_i при $\Gamma_i \neq 0$, будем обозначать C_{ev}^ℓ .

Как правило, полагаем, что ограниченная область $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$ прилегает к координатным гиперплоскостям $x_i = 0$. Такой выбор объясняется особенностью сингулярного дифференциального оператора Бесселя на части границы Γ^o , принадлежащей координатной гиперплоскости $x_i = 0$ и весом интегральной меры Лебега — Киприянова. Следовательно, граница такой области состоит из части $\Gamma^+ \subset \mathbb{R}_n^+$ и $\Gamma^o : x_i = 0$, т. е. $\Gamma = \Gamma^o \cup \Gamma^+$.

Особенность сингулярного дифференциального оператора Бесселя (в виде слагаемого $\frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$) приводит к необходимости рассматривать соответствующие задачи в классах функций четных по каждой переменной x_i , т. к. в этом случае при условии $f \in C_{ev}^2$

$$\lim_{x_i \rightarrow +0} B_{\pm \gamma_i} f(x) = (1 \pm \gamma_i) f''_{x_i x_i}(x) \Big|_{x_i=0} < \infty$$

При этом выражение

$$B_{\pm \gamma_i} f = \frac{1}{1 \pm \gamma_i} B_{\pm \gamma_i} f(x) \quad (4)$$

называется *B-производной* функции f , что связано с возможностью представить его правую часть в виде предела отношения приращения функции, порожденной обобщенной разностью, к шагу приращения аргумента, когда этот шаг стремиться к нулю.

Это свойство распространяется на любую натуральную степень $k \in \mathbb{N}$ сингулярного оператора Бесселя:

$$B_{\gamma_i}^k \omega_h(x) \Big|_{x_i=0} = P_k(\gamma_i) \frac{\partial^{2k} \omega_h(x)}{\partial x_i^{2k}} \Big|_{x_i=0}, \quad \gamma \in \mathbb{R}_1,$$

где $P_k(t)$ соответствующий многочлен порядка k .

Определение 1. Функция f , определенная в евклидовой области $\Omega^+ \subseteq \mathbb{R}_n^+$ называется четной по Киприянову, если она может быть продолжена в область $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \subseteq \mathbb{R}_n$ с сохранением класса своей принадлежности.

В частности, для гладких функций такое продолжение возможно при условии равенства нулю всех производных (существующих) нечетного порядка на границе $\Gamma^o : \frac{\partial^{2m-1}}{\partial x_i^{2m-1}} f(x) \Big|_{x_i=0} = 0$, $m \in \mathbb{N}$ (см. [6] (с. 21)).

В дальнейшем в этой работе мы имеем дело только с функциями $u(x)$ четными по Киприянову по каждой из переменных x_i , поэтому, сокращая, указанные функции называем просто «четными».

Следуя [6], обозначим через Ω^- области, полученные зеркальным отражением области Ω^+ от координатных плоскостей $x_i = 0$. Объединение этих областей обозначим $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$. От границы Γ области Ω мы требуем гладкости в окрестности $\Gamma \cap \Gamma^o$. Связано это с тем, что работа идет с функциями $u(x)$, для которых $B_{\gamma_i} u(x)$ существует в каждой точке $x_i = 0$.

Таким образом граница Γ^o — это граница симметрии, поэтому под областью Ω^+ будем понимать частично замкнутую область $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^o$. Подобласти таких областей, как правило, включают соответствующие части границ Γ^o и мы их называем *s-внутренней* подобластью области Ω^+ с соответствующей частью границы Γ^o .

Через $(\cdot, \cdot)_{-\gamma}$ будем обозначать следующую билинейную форму с мерой интегрирования Лебега — Киприянова:

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\Omega^+} u(x)v(x)x^{-\gamma} dx, \quad \Omega^+ \subseteq \overline{\mathbb{R}_n^+}, \quad x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}, \quad 0 < \gamma_i < 1.$$

2. Результаты. Обобщенный $\mathbb{T}$ -псевдосдвиг и $\mathbb{T}$ -сдвиг

Пусть x и $y \in \mathbb{R}_n$. $\mathbb{T}$ -Псевдосдвигом в $\mathbb{R}_n$ будем называть интегральный оператор

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x), \quad (5)$$

где используется следующая конструкция одномерного обобщенного $\mathbb{T}$ -псевдосдвига:

$$\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \int_0^\pi [x_i^2 y_i^2]^{\frac{\gamma_i+1}{2}} \frac{f\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i)}, x^i\right)}{\left(x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i\right)^{\frac{\gamma_i+1}{2}}} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i. \quad (6)$$

Здесь и ниже применено обозначение аргумента функции (3). Свойства обобщенного $\mathbb{T}_x^y$ -псевдосдвига приведены в [10]. Обобщённый $\mathbb{T}$ -сдвиг в $\mathbb{R}_n$ имеет вид

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i+1} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x). \quad (7)$$

Введем также квази-псевдосдвиг

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{x_i}^{**y_i} f(x) &= (y_i^2)^{-\frac{\gamma_i+1}{2}} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \int_0^\pi (x_i^2)^{\frac{\gamma_i+1}{2}} \frac{f\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i)}, x^i\right)}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i)}\right)^{\gamma_i+1}} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $x \geq \delta > 0$. Дополнительно отметим также формулу

$$(\mathbb{T}_y^x u, v)_{-\gamma} = \int_{\Omega^+} \mathbb{T}_x^y u(y)v(y)y^{-\gamma} dy = \int_{\Omega^+} \mathbb{T}_x^y u(x)v(y)y dy = (\mathbb{T}_x^y u, v)_{+1}.$$

Замечание 1. $\mathbb{T}$ -псевдосдвиг (6) симметричен по отношению к аргументу функции и шагу сдвига. Напротив, из (7) видим принципиальную особенность $\mathbb{T}_x^y$ -сдвига — это отсутствие свойства симметрии $\mathbb{T}_x^y f(x) \neq \mathbb{T}_y^x f(y)$. Но эта конструкция необходима для определения фундаментальных решений линейных сингулярных дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя с отрицательным параметром. Поэтому более востребованы в теории весовых классов функций оказываются средние функции, порожденные именно $\mathbb{T}_x^y$ -сдвигом. Оператор (6) не определен при $x_i = 0$ и при $y_i = 0$. Оператор (7) не определен только при $x_i = 0$. И, напротив, вполне разумно действует с нулевым шагом сдвига $\mathbb{T}_x^0 f(x) = f(x)$ при условии, что все координаты $x_i \geq \delta > 0$.

Усредняющим ядром в наших исследованиях будет служить классическое ядро $\omega_h(x)$ с дополнительным условием четности (по Киприянову) по каждой координате x_i аргумента x при условии $\gamma_i \neq 0$. Примером такого усредняющего ядра является функция (1).

Определим Λ -среднюю функцию $u_h(x)$ в виде обобщенной $\mathbb{T}$ -свертки с усредняющим ядром ω_h :

$$\Lambda_h u(x) = u_h(x) = \int u(y) \mathbb{T}_y^{*x} \omega_h(y) y^{-\gamma} dy.$$

Пусть Ω^+ ограниченная область, прилегающая к координатным гиперплоскостям $x_i = 0$, $i = 1, n$. Введем следующее пространство

$$L_p^{-\gamma}(\Omega^+) = \left\{ f : x^{-\frac{\gamma}{p}} f(x) \in L_p(\Omega^+), 1 \leq p < \infty, \quad \forall \int_{\Omega^+} f(x) x^{-\gamma} dx \right\}^{1/p}.$$

Получены следующие результаты.

Теорема 1. Если $u \in C^\infty(\Omega^+)$, то Λ -средняя функция $u_h \rightarrow u$ при $h \rightarrow 0$ равномерна во всякой замкнутой s -подобласти области Ω^+ .

Теорема 2. $\|u_h\|_{L_p^{-\gamma}(\Omega^+)} \leq 2^{n+|\gamma|} \|u\|_{L_p^{-\gamma}(\Omega^+)}, \quad 1 \leq p < \infty.$

Теорема 3. Если $u \in L_p^{-\gamma}(\Omega^+)$, то $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{L_p^{-\gamma}(\Omega^+)} = 0.$

Теорема 4. Множество всех финитных в области Ω^+ функций плотно в $L_p^{-\gamma}(\Omega^+).$

Все указанные теоремы справедливы для Λ_h -усреднений, порожденных $\mathbb{T}$ -псевдосдвигом при условии, что $x_i \geq \delta > 0$ и $y_i \geq \delta > 0$.

Заключение

Введенные в работе конструкции средних функций приспособлены для исследования проблем теории весовых пространств функций и для задач линейных дифференциальных уравнений, содержащих сингулярные дифференциальные операторы Бесселя с отрицательным параметром.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 24-21-00387).

Литература

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М. : Наука, 1988. – 336 с.
2. Никольский С. М. Приближения функций многих переменных и теоремы вложения. – М. : Наука, 1977. – 456 с.
3. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. – М. : Высшая школа, 1977. – 431 с.
4. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б. М. Левитан // УМН. – 1951. – Т. 6, № 2. – С. 102–143.
5. Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. – М. : Наука, 1973.
6. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. – М. : Наука, 1997.
7. Ляхов Л. Н. Построение ядер Дирихле и Валле-Пуссена — Никольского для j -бесселевых интегралов Фурье / Л. Н. Ляхов // Труды Московского математического общества. – 2015. – Т. 76, № 1. – С. 67–84.
8. Киприянов И. А., Кащенко Н. А. Об операторе осреднения, связанном с обобщенным сдвигом. Докл. АН СССР. – 1974. – 218:1. – С. 21–23
9. Ляхов Л. Н. О смешанных усреднениях Соболева-Киприянова / Л. Н. Ляхов, М. В. Половинкина // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Т. 15, № 2. – С. 329–330.
10. Ляхов Л. Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова / Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 12. – С. 1654–1665.

11. Ляхов Л. Н. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина, С. А. Рощупкин, Ю. Н. Булатов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2023. – № 7. – С. 52–65.
12. Какичев В. А. О свертках для интегральных преобразований // Изв. АН БССР, Сер. : Физ.-мат. наук. 1967.
13. Бритвина Л. Е. О некоторых полисвертках, порожденных преобразованием Ханкеля // Матем. заметки. – 2004. – № 76. – 1. – С. 20–26.
14. Ляхов Л. Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 12. – С. 1610–1620.
15. Ляхов Л. Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, № 4. – С. 517–528.
16. Ляхов Л. Н. Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B -оператором Киприянова / Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2023. – Т. 59, № 4. – С. 483–493.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Мегралиев Яшар, Гусейнова Афаг

Бакинский государственный университет

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости обратной краевой задачи с неизвестными коэффициентами и правой частью, зависящей от времени, для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка. Задача рассматривается в прямоугольной области. Дается определение классического решения поставленной задачи. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче (в определенном смысле), для которой доказывается теорема о существовании и единственности. Далее на основе этих фактов доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи. **Ключевые слова:** линейная обратная краевая задача, псевдогиперболического уравнения, существование и единственность, классического решения.

Введение

Существует много случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциальных уравнений по некоторым знаниям о его решениях. Такие задачи называются обратными краевыми задачами математической физики. Обратные краевые задачи возникают в различных областях человеческой деятельности, таких как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества в промышленности и т. д., что делает их активной областью современной математики. Обратные задачи для различных типов уравнений в частных производных изучались во многих работах. Среди них следует отметить работы А. Н. Тихонова [1], М. М. Лаврентьева [2, 3], В. К. Иванова [4] и их последователей. Для всестороннего обзора читатель должен обратиться к монографии А. М. Денисова [5]. В данной работе, следуя [6, 7], мы доказываем существование и единственность решения обратной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка.

1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Пусть $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$. В прямоугольнике D_T рассмотрим следующую обратную краевую задачу: найти тройку $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x, t)$, $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяющих уравнению [8]

$$u_{tt}(x, t) + \alpha u_{xxxx}(x, t) - \beta u_{xtt}(x, t) = a(t)u(x, t) + b(t)g(x, t) + f(x, t) \quad (x, t) \in D_T \quad (1)$$

начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

граничными условиями

$$u(0, t) = u_x(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3)$$

и с дополнительными условиями

$$u(x_i, t) = h_i(t) \quad (0 < x_i < 1, i = 1, 2; x_1 \neq x_2; 0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — фиксированные числа, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h_i(t)$ ($i = 1, 2$) — заданные функции.

Обозначим

$$\tilde{C}^{4,2}(D_T) = \{u(x, t) : u(x, t) \in C^2(D_T), u_{tt}(x, t),$$

$$u_{xxx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxx}(x,t) \in C(D_T)\}.$$

Определение. Под классическим решением обратной краевой задачи (1)–(4) понимаем тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T)$, $a(t) \in C[0,T]$, $b(t) \in C[0,T]$ удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2)–(4) в обычном смысле.

Аналогично [13], доказывается следующая

Теорема 1. Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1]$, $h_i(t) \in C^2[0,T]$ ($i=1,2$), $f(x,t) \in C(D_T)$, $g(x,t) \in C(D_T)$, $h(t) \equiv h_1(t)g(x_2,t) - h_2(t)g(x_1,t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$) и выполняются условия согласования

$$\varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(0). \quad (5)$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)–(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T)$, $a(t) \in C[0,T]$ и $b(t) \in C[0,T]$ из соотношений (1)–(3) и условия

$$h_i''(t) + \alpha u_{xxx}(x_i,t) - \beta u_{xxx}(x_i,t) = a(t)h_i(t) + b(t)g(x_i,t) + f(x_i,t) \quad (i=1,2; 0 \leq t \leq T). \quad (6)$$

2. Разрешимость обратной краевой задачи

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)–(3), (6) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x \quad \left(\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1) \right) \quad (7)$$

где

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots).$$

Тогда, применяя формальную схему Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$(1 + \beta \lambda_k^2) u_k''(t) + \lambda_k^4 \alpha u_k(t) = F_k(t; u, a, b) \quad (0 \leq t \leq T; k=1,2,\dots) \quad (8)$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad u_k'(0) = \psi_k \quad (k=1,2,\dots), \quad (9)$$

где

$$F_k(t; u, a, b) = a(t)u_k(t) + b(t)g_k(t) + f_k(t),$$

$$f_k(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \sin \lambda_k x dx, \quad g_k(t) = 2 \int_0^1 g(x,t) \sin \lambda_k x dx,$$

$$\varphi_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx, \quad \psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots).$$

Решая задачу (8), (9), находим:

$$u_k(t) = \varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1 + \beta \lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \quad (k=1,2,\dots), \quad (10)$$

где

$$\beta_k^2 = \frac{\alpha \lambda_k^4}{1 + \beta \lambda_k^2} \quad (k=1,2,\dots).$$

После подстановки выражений $u_k(t)$ ($k=1,2,\dots$) в (7), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)–(3), (6) получаем:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1 + \beta \lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \right\} \sin \lambda_k x. \quad (11)$$

Теперь, из (6), имеем:

$$a(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ (h_1''(t) - f(x_1,t)) g(x_2,t) - (h_2''(t) - f(x_2,t)) g(x_1,t) + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \left[\varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k (1 + \beta_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_k^2} F_k(t; u, a, b) \right] (g(x_2, t) \sin \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \sin \lambda_k x_2) \Bigg\}, \quad (12)$$

$$b(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ (h_2''(t) - f(x_2, t)) h_1(t) - (h_1''(t) - f(x_1, t)) h_2(t) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \left[\varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k (1 + \beta_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\lambda_k^2} F_k(t; u, a, b) \right] (h_1(t) \sin \lambda_k x_2 - h_2(t) \sin \lambda_k x_1) \right\}, \quad (13)$$

Таким образом, решение задачи (1)–(3), (6) свелось к решению системы (11)–(13), относительно неизвестных функций $u(x, t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Для исследования единственности решения задачи (1)–(3), (6) важную роль играет следующая лемма.

Лемма. Если $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ — любое классическое решение задачи (1)–(3), (6), то функции

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют на $[0, T]$ системе (10).

Пусть данные задачи (1)–(3), (6) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^4[0, 1]$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0, 1)$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = \varphi''(0) = \varphi'''(1) = \varphi^{(4)}(0) = 0$.
2. $\psi(x) \in C^2[0, 1]$, $\psi^{(3)}(x) \in L_2(0, 1)$, $\psi(0) = \psi'(1) = \psi''(0) = 0$.
3. $f(x, t), f_x(x, t) \in C(D_T)$, $f_{xx}(x, t) \in L_2(D_T)$, $f(0, t) = f_x(1, t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$).
4. $g(x, t), g_x(x, t) \in C(D_T)$, $g_{xx}(x, t) \in L_2(D_T)$, $g(0, t) = g_x(1, t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$).
5. $h_i(t) \in C^2[0, T]$ ($i = 1, 2$), $h(t) \equiv h_1(t)g(x_2, t) - h_2(t)g(x_1, t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$).

Доказана следующая.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1–5. Тогда при малых значениях $T + \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0, T]}$ задача (1)–(3), (6) имеет единственное решение.

С помощью теоремы 1 доказывается следующая

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2 и выполнены условия согласования $\varphi(0) = h(0)$, $\psi(0) = h'(0)$.

Тогда при малых значениях $T + \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0, T]}$ задача (1)–(4) имеет единственное классическое решение.

Литература

1. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // Доклады Академии наук СССР. – 1943. – Т. 39, № 4. – С. 195–198.
2. Лаврентьев М. М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Доклады Академии наук СССР. – 1964. – Т. 157, № 3. – С. 520–521.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 288 с.

4. Иванов В. К., Васин В. В., Танина В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М. : Наука, 1978. – 206 с.
5. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. – М. : МГУ, 1994. – 206 с.
6. Mehraliyev Y. T., Huseynova A. F. On solvability of an inverse boundary value problem for pseudo hyperbolic equation of the fourth order // Journal of Mathematics Research. – 2015. – 7, no 2, P. 101–109.
7. Isgendarov N. Sh., Mehraliyev Y. T. and Huseyinova A. F. On an Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq-Love Equation with an Integral Condition // Applied Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 10, no 63. – P. 3119–3131
8. Ерофеев В. И., Кажаяев В. В. Семерилов Н. П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002.

КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ РУНГЕ — КУТТЫ

М. А. Писарцов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Написана компьютерная программа, решающая произвольную систему дифференциальных уравнений указанным методом Рунге — Кутты. В качестве информации о методе Рунге — Кутты в программу передается таблица ее коэффициентов, называемая таблицей Бутчера. Программа предназначена для проведения компьютерных экспериментов по сравнению между собой различных методов Рунге — Кутты. В качестве иллюстрации работы программы решается система из трех дифференциальных уравнений с помощью неявного метода Рунге — Кутты 4-го порядка точности.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, метод Рунге — Кутты, порядок аппроксимации, таблица Бутчера.

Введение

Дифференциальным уравнением (ДУ) [4, 5] называют соотношение типа равенства относительно неизвестной функции, которая связывает значение независимой переменной (которую принято считать за время) со значениями неизвестной функции и её производных при текущем значении независимой переменной.

Методы Рунге — Кутты (РК) [1, 2, 4–6] — наиболее часто используемые методы численного решения начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Наиболее известен явный 4-х стадийный метод Рунге, который строится на основе квадратурной формулы Симпсона.

Настоящая работа посвящена описанию компьютерной программы, предназначенной для решения систем дифференциальных уравнений 1-го порядка произвольным методом Рунге — Кутты. В качестве примера в статье рассматривается неявный метод 4-го порядка точности, или же 4-х стадийный методом Гаусса. Его особенности — необычная таблица Бутчера и высокий порядок аппроксимации.

1. Теоретическая часть

Рассмотрим начальную задачу

$$y'(x) = f(x, y),$$

$$y(x_0) = y_0,$$

где f дифференцируема столько раз, сколько потребуется.

Пусть s — натуральное число. Пусть заданы числа c_i , b_j и a_{ij} , где $i, j = 1, \dots, s$. (Неявным) s -стадийным методом Рунге — Кутты (сокращённо РК) называют [2, 4–6] следующее правило вычисления приближения y_1 к точному значению $y(x_0 + h)$ решения y начальной задачи в точке $x_0 + h$:

$$k_i = f\left(x_0 + hc_i, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right), \quad i = 1, \dots, s, \quad (1)$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{j=1}^s b_j k_j. \quad (2)$$

В общем случае набор равенств (1) представляет собой систему уравнений относительно k_i . Обычно эта система может быть решена при малых h методом последовательных приближений, поскольку в правой части формулы (1) перед суммой k_j стоит малый множитель h .

Если $a_{ij} = 0$ при $i \leq j$, метод называют *явным*. В этом случае числа k_i можно найти из уравнений (1) последовательно. Если $a_{ij} = 0$ только при $i < j$, то метод называют *диагонально неявным*. В этом случае числа k_i можно снова находить последовательно, решая при этом нелинейные уравнения, содержащие только одну неизвестную. Нас интересуют *неявные* методы, когда все или почти все числа a_{ij} могут оказаться ненулевыми.

Неявные методы РК обладают важным преимуществом по сравнению с явными: их область устойчивости может содержать всю левую полуплоскость. Только такие методы подходят для решения произвольных систем ДУ.

Параметры c_i , b_j и a_{ij} метода РК принято располагать в виде табл. 1, называемой *таблицей Бутчера*.

Таблица 1

Таблица Бутчера метода РК

c_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\dots$	$a_{1,s-1}$	$a_{1,s}$
c_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\dots$	$a_{2,s-1}$	$a_{2,s}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$\dots$	$a_{s,s-1}$	$a_{s,s}$
	b_1	b_2	$\dots$	b_{s-1}	b_s

Очевидно, таблица Бутчера содержит в себе всю информацию о методе Рунге — Кутты.

Составлена компьютерная программа в пакете «Математика» [3,7], реализующая произвольный метод РК. Она содержит следующее: выбор шага h , процедуру решения системы уравнений (1), подстановку k_j в уравнение (2) и дальнейшее последовательное нахождение $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Важным критерием качества метода РК является порядок аппроксимации. Говорят, что метод РК имеет *порядок аппроксимации* m , если для любых достаточно гладких дифференциальных уравнений имеем

$$y_1 - y(x_0 + h) = O(h^{m+1}) \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0,$$

где $y(x_0 + h)$ — значение точного решения начальной задачи, а y_1 — значение приближенного решения в точке $x_0 + h$. Эквивалентное требование — ряды Тейлора по h приближенного y_1 и точного y решений совпадают до членов порядка h^m .

В первую очередь мы интересуемся гауссовыми неявными методами РК [3, 4]. Метод РК называется *гауссовым* или методом Гаусса, если он строится на основе квадратурной формулы Гаусса.

Согласно **теореме** о гауссовых методах РК [2, 4]: для любого числа стадий метода РК ($s \geq 2$) существует единственный s -стадийный метод Гаусса, имеющий порядок аппроксимации $2s$.

В настоящей работе в качестве конкретного примера рассматривается 4-х стадийный метод Гаусса, представленный в табл. 2.

Таблица 2

4-х стадийный метод Гаусса				
$\frac{1}{2} - \omega_2$	ω_1	$\omega'_1 - \omega_3 + \omega'_4$	$\omega'_1 - \omega_3 - \omega'_4$	$\omega_1 - \omega_5$
$\frac{1}{2} - \omega'_2$	$\omega_1 - \omega'_3 + \omega_4$	ω'_1	$\omega'_1 - \omega'_5$	$\omega_1 - \omega'_3 - \omega_4$
$\frac{1}{2} + \omega'_2$	$\omega_1 + \omega'_3 + \omega_4$	$\omega'_1 + \omega'_5$	ω'_1	$\omega_1 + \omega'_3 - \omega_4$
$\frac{1}{2} + \omega_2$	$\omega_1 + \omega_5$	$\omega'_1 + \omega_3 + \omega'_4$	$\omega'_1 + \omega_3 - \omega'_4$	ω_1
	$2\omega_1$	$2\omega'_1$	$2\omega'_1$	$2\omega_1$

где ω_i принимают следующие значения:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{30}}{144}, & \omega'_1 &= \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{30}}{144}, \\
 \omega_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}}, & \omega'_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}}, \\
 \omega_3 &= \omega_2 \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{30}}{24} \right), & \omega'_3 &= \omega'_2 \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{30}}{24} \right), \\
 \omega_4 &= \omega_2 \left(\frac{1}{21} + \frac{5\sqrt{30}}{168} \right), & \omega'_4 &= \omega'_2 \left(\frac{1}{21} - \frac{5\sqrt{30}}{168} \right), \\
 \omega_5 &= \omega_2 - 2\omega_3, & \omega'_5 &= \omega'_2 - 2\omega'_3.
 \end{aligned}$$

Средняя часть таблицы Бутчера (то есть коэффициенты a_{ij}) в десятичных дробях для этого метода имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix}
 0.0869637 & -0.0266042 & 0.0126275 & -0.00355515 \\
 0.188118 & 0.163036 & -0.0278804 & 0.0067355 \\
 0.167192 & 0.353953 & 0.163036 & -0.0141907 \\
 0.177483 & 0.523978 & 0.352677 & 0.0869637
 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что здесь есть отрицательные числа. Кроме того, числа над диагональю на порядок меньше чисел под диагональю. Данный метод имеет порядок аппроксимации $s = 8$.

2. Численный пример

Рассматривается система ДУ

$$\begin{cases}
 z'_1(x) = 2z_1(x) - z_2(x), \\
 z'_2(x) = -z_1(x) + 3z_2(x), \\
 z'_3(x) = xz_3(x)
 \end{cases}$$

с начальными условиями

$$z_1(0) = 0.25, \quad z_2(0) = 0.5, \quad z_3(0) = 1.$$

Нам неизвестно аналитическое решение этой начальной задачи, но команда *NDSolve* пакета «Математика» [3,7] способна приближенно решить данную систему и изобразить полу-

ченное решение на графике (рис.1) в виде нескольких кривых. Это решение мы используем как точное для сравнения с ним нашего результата. Для сравнения к полученным графикам добавим поточечные значения решения с шагом $h = 0.1$, найденные путем применения 4-х стадийного метода Гаусса.

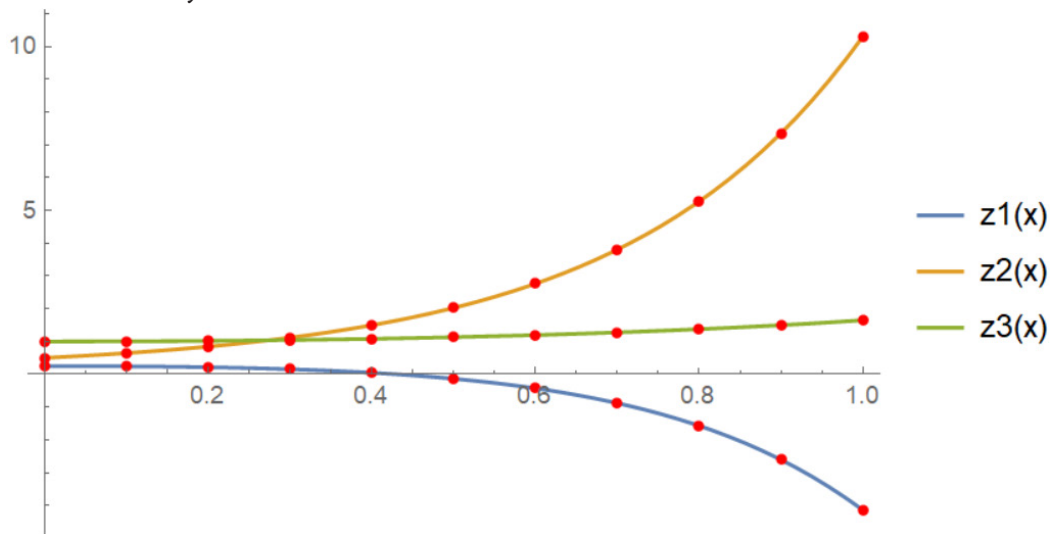


Рис. 1. График решения

Визуально различий не видно, поэтому была составлена сравнительная таблица погрешности. Ниже (табл.3) она приведена только для второй кривой, то есть для $z_2(x)$.

Таблица 3

Сравнительная таблица погрешности решения для $z_2(x)$

Значения в узлах для $z_2(x)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	...
Решения:						
<i>NDSolve</i>	0.5	0.646029	0.845056	1.1186	1.49734	...
Метод РК	0.25	0.646029	0.845056	1.1186	1.49734	...
Погрешность	0.	1.01926×10^{-9}	4.04114×10^{-8}	1.22886×10^{-7}	1.92038×10^{-7}	...
...	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
...	2.02503	2.76423	3.80438	5.27352	7.35504	10.31174
...	2.02503	2.76423	3.80438	5.27353	7.35505	10.31175
...	-1.75367×10^{-8}	-2.84229×10^{-7}	-2.12412×10^{-6}	-2.44437×10^{-7}	-8.43124×10^{-6}	2.08037×10^{-6}

Все вычисления проводились в пакете «Математика» [3, 7].

Заключение

Таким образом, численный эксперимент показывает, что программа работает правильно.

Литература

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. – Второе изд. – М. –Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2002. – 848 с.

ченное решение на графике (рис.1) в виде нескольких кривых. Это решение мы используем как точное для сравнения с ним нашего результата. Для сравнения к полученным графикам добавим поточечные значения решения с шагом $h = 0.1$, найденные путем применения 4-х стадийного метода Гаусса.

Визуально различий не видно, поэтому была составлена сравнительная таблица погрешности. Ниже (табл.3) она приведена только для второй кривой, то есть для $z_2(x)$.

Таблица 3

Сравнительная таблица погрешности решения для $z_2(x)$

Значения в узлах для $z_2(x)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	...
Решения:						
<i>NDSolve</i>	0.5	0.646029	0.845056	1.1186	1.49734	...
Метод РК	0.25	0.646029	0.845056	1.1186	1.49734	...
Погрешность	0.	1.01926×10^{-9}	4.04114×10^{-8}	1.22886×10^{-7}	1.92038×10^{-7}	...
...	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
...	2.02503	2.76423	3.80438	5.27352	7.35504	10.31174
...	2.02503	2.76423	3.80438	5.27353	7.35505	10.31175
...	-1.75367×10^{-8}	-2.84229×10^{-7}	-2.12412×10^{-6}	-2.44437×10^{-7}	-8.43124×10^{-6}	2.08037×10^{-6}

Все вычисления проводились в пакете «Математика» [3, 7].

Заключение

Таким образом, численный эксперимент показывает, что программа работает правильно.

Литература

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. – Второе изд. – М. –Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2002. – 848 с.
2. Курбатов В. Г. Конструирование методов Рунге — Кутты: учебное пособие / В. Г. Курбатов. – Второе изд. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024. – 98 с.
3. Курбатов В. Г. Пакет «Математика» в прикладных научных исследованиях: учебное пособие / В. Г. Курбатов, В. Е. Чернов. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. – 240 с.
4. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М. : Мир, 1999. – 685 с.
5. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. – М. : Мир, 1990. – 685 с.
6. Butcher J. C. Implicit Runge–Kutta processes / John Charles Butcher // Math. Comp. – 1964. – Vol. 18. – P. 50–64.
7. Wolfram S. The Mathematica book / S. Wolfram. – Fifth edition. – New York : Wolfram Media, 2003. – 1488 p.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗОМ ПО ЛУЧУ

А. А. Плетнев

Воронежский государственный университет

Аннотация. Изучается задача о распределении поля температуры с переменным коэффициентом внутренней теплопроводности в области, представляющей собой плоскость с разрезом по лучу, моделирующую неоднородный материал с трещиной. Рассматривается стационарный случай. Исходная краевая задача сводится к обобщенной задаче. Строится решение обобщенной задачи как свёртка фундаментального решения и слагаемых правой части. Далее строится решение исходной задачи как сумма двух потенциалов: поверхностного стационарного потенциала простого слоя и поверхностного стационарного теплового потенциала двойного слоя. Каждый потенциал изучается отдельно. Доказывается выполнение краевых условий на разность температур и тепловых потоков при переходе через трещину.

Ключевые слова: краевая задача, стационарное уравнение теплопроводности, условия типа трансмиссии, материал с трещиной, трещина по лучу, задача теплопроводности, граничные условия, интегральный вид решения, уравнение в частных производных, уравнение математической физики.

Введение

Изучается задача о распределении поля температуры с переменным коэффициентом внутренней теплопроводности в области, представляющей собой плоскость с разрезом по лучу, моделирующую неоднородный материал с трещиной. Областью, в которой рассматривается задача, является плоскость Ox_1x_2 с разрезом $l = \{x \mid x_2 = \pm 0; x_1 \in [-1; \infty)\}$, описывающим трещину по отрезку $[-1; \infty)$ оси абсцисс.

Рассматривается случай стационарного распределения тепла, если вектор направления изменения неоднородности материала направлен под углом $\alpha = \frac{\pi}{2}$ к положительной полуоси абсцисс.

Рассматриваемое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + k \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0. \quad (1)$$

Граничные условия заданы следующим образом

$$u(x_1, +0) - u(x_1, -0) = q_0(x_1); \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x_1, +0)}{\partial x_2} + ku(x_1, +0) - \frac{\partial u(x_1, -0)}{\partial x_2} - ku(x_1, -0) = q_1(x_1); x_1 \in [-1; \infty). \quad (3)$$

1. Изучение обобщенной задачи

Лемма 1. Решение задачи (1)–(3) $u(x_1, x_2)$ является решением обобщенной задачи в пространстве $D'(\mathbb{R}^2)$.

$$\Delta u(x) + k \frac{\partial u}{\partial x_2} = q_1(x_1) \cdot \delta_{[-1, \infty)} + q_0(x_1) \cdot \frac{\partial \delta_{[-1, \infty)}}{\partial x_2}. \quad (4)$$

Лемма 2. Фундаментальным решением оператора $\Delta + k \frac{\partial}{\partial x_2}$ в $\mathbb{R}^2$ является функция

$$E(x_1, x_2), \text{ заданная равенством } E(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{k}{2}x_2} \cdot K_0\left(\frac{k}{2}|x|\right).$$

Теорема 1. Пусть функции $q_i(x_1)$, $i = 0, 1$, принадлежат пространству $D'(\mathbb{R}^2)$ и $\text{supp } q_i \in [-1; \infty)$, $i = 1, 2$. Функция $E(x_1, x_2)$ из $S'(\mathbb{R}^2)$ — фундаментальное решение оператора $\Delta + k \frac{\partial}{\partial x_2}$. Тогда решение обобщённой задачи (4) существует в $D'(\mathbb{R}^2)$ и представимо следующим образом:

$$u(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) * q_1(x_1) \delta_{[-1, \infty)} + E(x_1, x_2) * \frac{\partial q_0(x_1) \delta_{[-1, \infty)}}{\partial x_2}. \quad (5)$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда решение обобщённой задачи (4) представимо в виде

$$u(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2) + u_0(x_1, x_2), \quad (6)$$

где

$$u_1(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) * q_1(x_1) \delta_{[-1, \infty)} — \quad (7)$$

поверхностный стационарный тепловой потенциал простого слоя;

$$u_0(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) * \frac{\partial q_0(x_1) \delta_{[-1, \infty)}}{\partial x_2} — \quad (8)$$

поверхностный стационарный тепловой потенциал двойного слоя.

2. Стационарные потенциалы

Утверждение 1. Пусть функция $q_1(x_1)$ принадлежит множеству функций $C^2[-1, \infty)$, функции $q_1(x_1)$, $q_1'(x_1)$, $\int_{-1}^{\infty} q_1(\sigma_1) d\sigma_1$ ограничены.

Тогда поверхностный стационарный тепловой потенциал простого слоя представим в виде

$$u_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}x_2} K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) q_1(\sigma_1) d\sigma_1 \quad (9)$$

и при $x_1 \in (-1; \infty)$ по непрерывности выполнены условия

$$u_1(x_1, +0) - u_1(x_1, -0) = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_1(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1(x_1, -0)}{\partial x_2} - k u_1(x_1, -0) + k u_1(x_1, +0) = q_1(x_1). \quad (11)$$

Если дополнительно потребовать выполнение равенства $q_1(\pm 1) = 0$, то условия (10), (11) выполняются и в точке $x_1 = -1$ по непрерывности. Кроме того, функция $u_1(x_1, x_2)$ принадлежит множеству функций $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus I)$.

Утверждение 2. Пусть функция $q_0(x_1)$ принадлежит множеству функций $C^2[-1, \infty)$, функции $q_0(x_1)$, $q_0'(x_1)$ ограничены.

Тогда поверхностный стационарный тепловой потенциал двойного слоя представим в виде

$$\begin{aligned} u_0(x_1, x_2) = & \frac{k}{4\pi} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}x_2} K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) \frac{x_2 q_0(\sigma_1)}{\sqrt{x_2^2 + (x_1 - \sigma_1)^2}} d\sigma_1 + \\ & + \frac{k}{4\pi} \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}x_2} K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) q_0(\sigma_1) d\sigma_1. \end{aligned} \quad (12)$$

и при $x_1 \in (-1, N)$, N некоторое большое число, по непрерывности выполнено условие

$$u_0(x_1, +0) - u_0(x_1, -0) = q_0(x_1); \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_0(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_0(x_1, -0)}{\partial x_2} + ku_0(x_1, +0) - ku_0(x_1, -0) = 0. \quad (14)$$

Условия выполнены в точке $x_1 = -1$ и при $x_1 \rightarrow \infty$ в смысле главного значения. Кроме того, потенциал $u_0(x_1, x_2)$ принадлежит множеству функций $C^\infty(R^2 \setminus l)$.

3. Решение исходной задачи

Теорема 2. Пусть функции $q_i(x_i)$, $i = 0, 1$, принадлежат множеству функций $C^2[-1, \infty)$ и ограничены, $q'_i(x_i)$, $i = 0, 1$, $\int_{-1}^{\infty} q_i(\sigma_1) d\sigma_1$ также ограничены. Тогда решение задачи (1)–(3) имеет вид

$$\begin{aligned} u = & -(2\pi)^{-1} \int_{-1}^{\infty} e^{-0,5kx_2} K_0\left(0,5k\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) q_1(\sigma_1) d\sigma_1 + \\ & + k(4\pi)^{-1} \int_{-1}^{\infty} e^{-0,5kx_2} K_1\left(0,5k\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) \frac{x_2 q_0(\sigma_1)}{(x_2^2 + (x_1 - \sigma_1)^2)^{0,5}} d\sigma_1 + \\ & + k(4\pi)^{-1} \int_{-1}^{\infty} e^{-0,5kx_2} K_0\left(0,5k\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) q_0(\sigma_1) d\sigma_1. \end{aligned} \quad (15)$$

При $x_1 \in (-1; N)$, где N некоторое большое число, по непрерывности выполнены условия (2)–(3). В точке $x_1 = -1$ и при $x_1 \rightarrow \infty$ условия выполнены в смысле главного значения.

Функция $u(x_1, x_2)$ принадлежит множеству функций $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus l)$.

Литература

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 527 с.
2. Глушко А. В. Уравнения математической физики: учебник / А. В. Глушко, А. Д. Баев, А. С. Рябенко. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2011. – 520 с.
3. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Наука, 1977. – 456 с.
4. Глушко А. В. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Вестник ВГУ серия математика физика. – 2010. – № 2. – С. 47–50.
5. Логинова Е. А. Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной / Е. А. Логинова // Вестник СПбГУ серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2012. – Вып. 1. – С. 40 – 47.

ПРЕЗЕНТАЦИЯ УЧЕБНИКА «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

К. Б. Сабитов

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий

Аннотация. В книге дан вывод уравнений математической физики, приведены классические постановки основных задач, аналитические методы их решения. Представлены обобщенные по Соболеву решения краевых задач для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов, вариационный и галеркинские методы решения краевых задач, а также методы интегральных преобразований, возмущений, автомодельных решений и конечных разностей решения краевых задач уравнений математической физики. В отличие от известных учебников данное пособие содержит новый материал по уравнениям смешанного типа, моделирующим околосзвуковые течения. Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению ВПО 010400 «Прикладная математика и информатика».

Ключевые слова: основные уравнения математической физики, начальная, начально-граничные, граничные задачи, методы Римана, Грина, разделения переменных, интегральных уравнений, интегральных преобразований, численные, уравнения смешанного типа, задачи Трикоми, Дирихле.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	8
Предисловие ко второму изданию	9
Список некоторых обозначений и сокращений	13
Глава 1. Постановка основных задач для уравнений математической физики	15
§ 1. Дифференциальные уравнения в частных производных. Основные понятия	15
§ 2. Вывод уравнения колебаний струны. Постановка основных начально-граничных задач	24
§ 3. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка основных начально-граничных задач	30
§ 4. Задачи, приводящиеся к уравнениям Пуассона и Лапласа. Постановка основных граничных задач	36
§ 5. Задача Коши. Характеристики. Теорема Коши — Ковалевской	38
§ 6. Понятие о корректно поставленной краевой задаче для дифференциальных уравнений. Примеры некорректных краевых задач	44
Глава 2. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка	49
§ 7. Типы линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка	49
§ 8. Приведение к каноническому виду дифференциального уравнения второго порядка от двух независимых переменных	55
Глава 3. Уравнения гиперболического типа	64
§ 9. Первая начально-граничная задача для уравнения колебаний струны	64
1. Постановка задачи. Энергетическое неравенство. Единственность и устойчивость решения (64). 2. Существование решения (71).	
§ 10. Общие замечания о методе разделения переменных	88
1. Замкнутость и полнота ортогональных систем функций (88) 2. Вторая и третья началь-	

но-граничные задачи для уравнения струны (90). 3. Начально-граничная задача для более общего уравнения гиперболического типа (92).	
§ 11. Задача Дирихле для уравнения струны	100
§12. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера	108
1. Постановка задачи Коши для уравнения струны (108). 2. Построение общего решения уравнения струны (108). 3. Построение решения задачи Коши (110). 4. Физическая интерпретация решения задачи Коши (114).	
§ 13. Задачи Гурса и Дарбу для уравнения струны	116
§ 14. Задача Коши для трехмерного и двумерного волновых уравнений	121
1. Задача Коши для трехмерного однородного волнового уравнения. Формула Пуассона. Принцип Гюйгенса (121). 2. Задача Коши для трехмерного неоднородного волнового уравнения. Формула Кирхгофа (130). 3. Задача Коши для двумерного волнового уравнения. Метод спуска (134). 4. Энергетическое неравенство. Непрерывная зависимость решения. Единственность решения (136).	
§ 15. Задачи Коши и Гурса для общего линейного гиперболического уравнения. Метод последовательных приближений	141
1. Задача Коши (141) 2. Задача Гурса (147).	
§ 16. Метод Римана для построения решения задач Коши и Гурса	151
1. Понятие сопряженного дифференциального оператора. Формула Грина (151). 2. Метод Римана (151).	
§ 17. Решение задачи Коши методом Римана для телеграфного уравнения	156
1. Вывод телеграфного уравнения (156). 2. Постановка задачи Коши (159). 3. Построение функции Римана (160). 4. Построение решения задачи Коши (164).	
§ 18. Решение задачи Коши методом Римана для вырождающегося гиперболического уравнения	163
1. Постановка задачи Коши (163). 2. Построение функции Римана (164). 3. Построение решения задачи Коши (167).	
Глава 4. Уравнения эллиптического типа	172
§ 19. Общие сведения об эллиптических уравнениях	172
§ 20. Гармонические функции. Примеры. Теорема Кельвина	174
§ 21. Внутренний принцип экстремума гармонических функций. Единственность и устойчивость решения задачи Дирихле	180
§ 22. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круговых областях. Формула Пуассона	184
1. Решение задачи Дирихле в круговых областях (184). 2. Формула Пуассона. Обобщенное решение задачи Дирихле (190).	
§ 23. Свойства гармонических функций	193
§ 24. Граничный принцип экстремума для гармонических функций. Задачи Неймана и Пуанкаре для уравнения Пуассона	204
§ 25. Внешние граничные задачи для уравнения Лапласа	211
§ 26. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом Грина	217
1. Формула Грина оператора Лапласа. Интегральное представление решения уравнения Пуассона (217). 2. Функция Грина задачи Дирихле и ее свойства (222). 3. Решение задачи Дирихле в произвольной области методом Грина (228). 4. Построение решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге и в полукруге (235). 5. Построение решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре и в полушаре (238). 6. Метод конформных отображений (240).	

§ 27. Решение задачи Неймана для уравнения Пуассона методом Грина	244
1. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана (244). 2. Функция Грина задачи Неймана (245). 3. Построение функции Грина задачи Неймана в шаре и вне шара (251).	
§ 28. Решение граничных задач для уравнения Лапласа методами потенциала и интегральных уравнений	257
1. Потенциалы объема, простого и двойного слоев (258). 2. Поверхности Ляпунова (261). 3. Свойства потенциала двойного слоя (264). 4. Свойства потенциала простого слоя (267). 5. Интегральные уравнения Фредгольма (271). 6. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям (273).	
§ 29. Уравнение Гельмгольца	280
1. Физическая интерпретация решения (280). 2. Фундаментальные решения уравнения Гельмгольца (281). 3. Интегральное представление решения. Функция Грина (283). 4. Внутренние задачи для уравнения Гельмгольца (286). 5. Внешние задачи. Принцип излучения (290).	
Глава 5. Уравнения параболического типа	299
§ 30. Первая начально-граничная задача для уравнения теплопроводности	299
1. Постановка задачи. Принцип экстремума. Единственность и устойчивость решения (299). 2. Решение задачи методом разделения переменных (302). 3. Начально-граничная задача для уравнения теплопроводности с обратным направлением времени (306). 4. Функции Грина первой начально-граничной задачи (307). 5. Понятие δ -функции Дирака (308). 6. Обобщенное решение первой начально-граничной задачи (310).	
§ 31. Распространение тепла в бесконечном стержне (задача Коши)	312
1. Постановка задачи Коши. Единственность решения (312). 2. Существование решения задачи Коши (314). 3. Физический смысл фундаментального решения (319).	
Глава 6. Обобщенные решения по Соболеву краевых задач для уравнений математической физики	322
§ 32. Вспомогательные сведения из функционального анализа	322
1. Необходимые понятия и утверждения (322). 2. Средние функции. Обобщенные производные (325). 3. Пространство Соболева и его свойства (332).	
§ 33. Обобщенные решения основных граничных задач для эллиптического уравнения второго порядка	340
§ 34. Обобщенные решения начально-граничных задач для гиперболического уравнения второго порядка	347
1. Постановка начально-граничных задач (347). 2. Задача на собственные значения для эллиптического оператора 2-го порядка (348). 3. Вариационные свойства собственных значений и функций спектральной задачи (356). 4. Построение обобщенного решения первой начально-граничной задачи для однородного гиперболического уравнения (357). 5. Построение обобщенного решения первой начально-граничной задачи для неоднородного гиперболического уравнения (361).	
§ 35. Обобщенные решения начально-граничных задач для параболического уравнения второго порядка	363
§ 36. Вариационный метод решения граничных задач для эллиптических уравнений	368
1. Задача Дирихле (368). 2. Задача Неймана и третья граничная задача (372). 3. Метод Ритца (373).	
§ 37. Метод Галеркина решения краевых задач для уравнений математической физики	377
1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона (378). 2. Начально-граничная задача для уравнения теплопроводности (379). 3. Начально-граничная задача для волнового уравнения (381).	
Глава 7. Уравнения смешанного типа	386
§38. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева — Бицадзе. Единственность решения	387

1. Постановка задачи Трикоми. Принцип экстремума. Единственность решения задачи Трикоми (387). 2. Метод Трикоми доказательства единственности решения задачи (390).	
§39. Существование решения задачи Трикоми	391
§40. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева — Бицадзе в прямоугольной области	401
1. Постановка задачи (401). 2. Единственность решения (402). 3. Существование решения задачи (405). 4. устойчивость решения (408).	
§41. Начально-граничная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа	409
1. Постановка задачи (409). 2. Единственность решения (410). 3. Существование и устойчивость решения задачи (413).	
Глава 8. Другие методы решения краевых задач для уравнений математической физики	417
§42. Метод интегральных преобразований	417
1. Преобразования Лапласа, Фурье и Меллина (417). 2. Применение интегральных преобразований к решению краевых задач (428).	
§43. Метод возмущений	436
§44. Метод подобия, автомодельные решения	439
§45. Метод конечных разностей или сеток	445
Приложение. Общие сведения о специальных функциях	459
Введение	459
§1. Эйлеровы гамма- и бета-функции	461
1. Свойства гамма-функции (462). 2. Свойства бета-функции (466). 3. Логарифмическая производная гамма-функции (468).	
§ 2. Теорема существования и единственности решения начальной задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка	469
§3. Поведение решений дифференциальных уравнений второго порядка в особой точке	472
§ 4. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя	474
§5. Модифицированные функции Бесселя	495
§ 6. Гипергеометрическое уравнение. Функции Гаусса	500
§ 7. Ортогональные многочлены	512
1. Полиномы Лежандра и их свойства (512). 2. Присоединенные функции Лежандра и их свойства (522). 3. Многочлены Эрмита и их свойства (525). 4. Многочлены Лагерра и их свойства (531). 5. Многочлены Якоби и Чебышева и их свойства (537).	
§8. Сферические и шаровые функции. Свойства сферических функций	544
Задачи для самостоятельной работы	550
Список литературы	566

По вопросам приобретения обращаться в издательство «Лаборатория знаний», г. Москва, телефон 8(499)157-5272; e-mail: info@pilotLZ.ru

ОБ УПРАВЛЕНИИ СУЩЕСТВЕННЫМИ СЧЕТНЫМИ СПЕКТРАМИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. Х. Сташ, А. А. Панеш

Адыгейский государственный университет

Аннотация. Установлено существование двумерной линейной однородной дифференциальной системы с непрерывными ограниченными на неотрицательной полуоси коэффициентами, спектры всех показателей колеблемости и блуждаемости которой совпадают с любым наперед заданным замкнутым ограниченным счетным множеством неотрицательных чисел с единственной нулевой предельной точкой. Более того, для любого ненулевого решения этой системы все показатели колеблемости и блуждаемости совпадают между собой, причем каждое их значение является метрически и топологически существенным.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, линейная система, колеблемость решения, число нулей функции, сильный показатель колеблемости, слабый показатель колеблемости, сильный показатель блуждаемости, слабый показатель блуждаемости, характеристическая частота, показатель Ляпунова.

Введение

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через M^n множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in R_+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывными ограниченными коэффициентами. В дальнейшем матрицу A коэффициентов будем отождествлять с задаваемой ею системой. Множество всех ненулевых решений системы $A \in M^n$ обозначим через $S_*(A)$ и положим

$$S^n = \bigcup_{A \in M^n} S_*(A).$$

Для показателей колеблемости и блуждаемости случай $n = 1$ допустим, но бессодержателен, поскольку на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка все показатели равны нулю. Спектры (множество значений на ненулевых решениях) показателей колеблемости и блуждаемости линейного однородного уравнения второго порядка состоят ровно из одного неотрицательного числа [1], но зато спектры показателей двумерных систем могут достигать мощности континуума [2, 3]. В последнем случае принципиально невозможно добиться того, чтобы сразу все значения какого-либо показателя оказались существенными.

Спектры показателей колеблемости и блуждаемости автономных дифференциальных систем полностью описаны в работах [1, 4, 5]. В докладах [6, 7] И. Н. Сергеева было установлено, что спектры показателей колеблемости и блуждаемости любой автономной системы содержат только одно существенное значение.

Возможность реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости и блуждаемости двумерной системы продемонстрирована в работах [8, 9], а управление счетными рациональными существенными спектрами — в [10, 11]. В связи с этим возникает вопрос о возможности расширения последнего класса спектров рассматриваемых показателей.

1. Показатели колеблемости и блуждаемости

Сначала дадим основные определения.

Определение 1 [12]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая (нестрогая) смена знака* функции $y: R_+ \rightarrow R$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [1, 13]. Для вектора $m \in R_*^n \equiv R^n \setminus \{0\}$ и вектор-функции $x \in S^n$ обозначим:
 $v^-(x, m, t)$ — число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$v^\sim(x, m, t)$ — число точек *нестрогой смены знака* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$v^0(x, m, t)$ — число *нулей* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$v^+(x, m, t)$ — число *корней* (т. е. нулей с учетом их кратности) функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$v^*(x, m, t)$ — число *гиперкорней* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$, где в процессе подсчета этого количества каждый некрatный корень считается ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз независимо от его фактической кратности.

Определение 3 [1, 14]. Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней функции $x \in S^n$ при $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ соответственно зададим формулами

$$\begin{aligned} \hat{v}_\bullet^\alpha(x) &\equiv \inf_{m \in R_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} v^\alpha(x, m, t) & \left(\check{v}_\bullet^\alpha(x) &\equiv \inf_{m \in R_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} v^\alpha(x, m, t) \right), \\ \hat{v}_\circ^\alpha(x) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in R_*^n} \frac{\pi}{t} v^\alpha(x, m, t) & \left(\check{v}_\circ^\alpha(x) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in R_*^n} \frac{\pi}{t} v^\alpha(x, m, t) \right). \end{aligned}$$

Замечание 1. Для любой функции $x \in S^n$ выполнены соотношения:

$$\check{v}_\circ^\alpha(x) \leq \check{v}_\bullet^\alpha(x) \leq \hat{v}_\bullet^\alpha(x), \quad \hat{v}_\circ^\alpha(x) \leq \hat{v}_\bullet^\alpha(x), \quad \check{v}_\circ^\alpha(x) \leq \hat{v}_\circ^\alpha(x), \quad \alpha = -, \sim, 0, +, *.$$

Определение 4 [1, 14]. Для функции $u \in C^1(R_+, R_*)$ и числа $t > 0$ введем *вариацию следа*

$$P(u, t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(u, \tau) \right| d\tau, \quad e(u, \tau) \equiv \frac{u(\tau)}{|u(\tau)|},$$

функции u за время от 0 до t , причем ситуацию, когда функция u имеет на отрезке $[0, t]$ хотя бы один нуль, считаем *вырожденной* и кладем по определению $P(u, t) = +\infty$.

Замечание 2. Геометрический смысл вариации следа функции u — это полная длина пути на единичной сфере конца вектора $e(u, \tau)$ при $\tau \in [0, t]$. Отсутствие у функции u нулей гарантирует, что вариация ее следа принимает только конечные значения (как интеграл $P(u, t)$ от непрерывной функции на отрезке).

Определение 5 [1, 14]. Нижние (верхние) слабый и сильный показатели блуждаемости функции $x \in S^n$ определим формулами

$$\begin{aligned} \check{\rho}_\circ(x) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} R^n} \frac{1}{t} P(Lx, t), & \hat{\rho}_\circ(x) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut} R^n} \frac{1}{t} P(Lx, t), \\ \check{\rho}_\bullet(x) &\equiv \inf_{L \in \text{Aut} R^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx, t), & \hat{\rho}_\bullet(x) &\equiv \inf_{L \in \text{Aut} R^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx, t), \end{aligned}$$

где $\text{Aut} R^n$ — множество всех невырожденных линейных операторов $L: R^n \rightarrow R^n$.

Замечание 3. Для любой функции $x \in S^n$ выполнены соотношения:

$$\check{\rho}_\circ(x) \leq \check{\rho}_\bullet(x) \leq \hat{\rho}_\bullet(x), \quad \check{\rho}_\circ(x) \leq \hat{\rho}_\circ(x), \quad \check{\rho}_\circ(x) \leq \check{\rho}_\bullet(x).$$

Для произвольной вектор-функций $z \in C^1(E, R_*^2)$ (E — либо отрезок вида $[0, T]$, либо полуось R_+) однозначно определим функцию $\phi_z: E \rightarrow R$ соотношениями

$$\phi_z(0) \in [0, 2\pi), \quad |z(t)|(\cos \phi_z(t), \sin \phi_z(t))^T = z(t), \quad t \in E, \quad \phi_z \in C^1(E).$$

Вариацию следа функции z за время от 0 до t можно вычислять по формуле

$$P(z, t) = \int_0^t |\dot{\phi}_z(\tau)| d\tau,$$

так как

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(z, \tau) \right| = \left| \frac{d}{d\tau} (\cos \phi_z(t), \sin \phi_z(t))^T \right| = \left| (-\sin \phi_z(t), \cos \phi_z(t))^T \dot{\phi}_z(\tau) \right| = |\dot{\phi}_z(\tau)|.$$

Определение 6 [14]. Для функции $x \in S^n$ условимся о следующем:

- 1) если значение некоторого верхнего (с крышечкой) показателя колеблемости или блуждаемости совпадает со значением одноименного нижнего (с галочкой) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без галочки и без крышечки;
- 2) если значение некоторого слабого (с пустым кружочком) показателя колеблемости или блуждаемости совпадает со значением одноименного сильного (с полным кружочком) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без кружочков вообще.

2. Формулировка основного результата

Определение 7 [6, 7]. Множество всех значений показателя $\chi: S_*(A) \rightarrow R_+$ назовём *спектром* этого показателя системы $A \in M^n$, причем значение $a \in \chi(S_*(A))$ назовем:

- 1) *метрически существенным*, если подмножество

$$\{x(0) | x \in S_*(A), \chi(x) = a\} \subset R^n \quad (1)$$

имеет положительную меру Лебега;

- 2) *топологически существенным*, если подмножество (1) заполняет некоторое открытое множество, возможно, с точностью до множества *первой категории Бэра*, т. е. счетного объединения нигде не плотных подмножеств;

- 3) *существенным*, если оно является метрически и топологически существенным.

Через $\text{ess } \chi(S_*(A))$ обозначим множество всех *существенных значений* показателя χ для системы A и назовем его *существенным спектром* системы A .

Замечание 4. Спектр показателя χ любой системы $A \in M^n$ содержит не более чем счетное множество существенных значений.

Теорема. Для любой последовательности (q_k) неотрицательных чисел, сходящейся к нулю, существует такая система $A \in M^2$, что справедливы равенства

$$v^-(x) = v^{\sim}(x) = v^0(x) = v^+(x) = v^*(x) = \rho(x), \quad x \in S_*(A),$$

$$\chi(S_*(A)) = \text{ess } \chi(S_*(A)) = \{q_k | k \in N\} \cup \{0\}, \quad \chi = v^-, v^{\sim}, v^0, v^+, v^*, \rho.$$

Заключение

В данной работе для определенного класса счетных множеств, доказано существование двумерной линейной ограниченной дифференциальной системы, у которой спектры всех показателей колеблемости совпадают с этим множеством, причем все значения существенны. Интересным остается вопрос о возможности управления произвольным счетным существенным спектром неотрицательной полуоси какого-либо показателя колеблемости двумерной системы.

Благодарности

Исследования авторов выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-03-2024-074 по проекту «Исследование асимптотических характеристик колеблемости дифференциальных уравнений и систем, а также оптимизационных методов».

Литература

1. *Сергеев И. Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И. Н. Сергеев // Известия РАН. Серия математическая. – 2012. – Т. 76. – С. 149–172.
2. *Сташ А. Х.* Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот / А. Х. Сташ // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 1. – С. 143–144.
3. *Шишлянников Е. М.* Пример дифференциальной системы с континуальным спектром показателя блуждаемости / Е. М. Шишлянников // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Матем. Механ. – 2017. – № 1. – С. 64–68.
4. *Бурлаков Д. С.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы / Д. С. Бурлаков, С. В. Цой // Труды Семинара им. И. Г. Петровского. – 2014. – Вып. 30. – С. 75–93.
5. *Сташ А. Х.* Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем / А. Х. Сташ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2019. – Т. 29, Вып. 4. – С. 558–568.
6. *Сергеев И. Н.* Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем / И. Н. Сергеев // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 11. – С. 1661–1662.
7. *Сергеев И. Н.* Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем / И. Н. Сергеев // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 11. – С. 1567–1568.
8. *Сташ А. Х.* О реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем / А. Х. Сташ, Н. А. Лобода // Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 4. – С. 500–507.
9. *Шишлянников Е. М.* Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости / Е. М. Шишлянников // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Матем. Механ. – 2017. – № 5. – С. 14–21.
10. *Шишлянников Е. М.* Примеры дифференциальных систем с различными спектрами показателя блуждаемости / Е. М. Шишлянников // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 11. – С. 1586–1587.
11. *Лобода Н. А.* Об управлении существенными спектрами показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем / Н. А. Лобода, А. Х. Сташ // Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 6. – С. 848–850.
12. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И. Н. Сергеев // Труды Семинара им. И. Г. Петровского. – 2006. – Вып. 25. – С. 249–294.
13. *Сергеев И. Н.* Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И. Н. Сергеев // Математический сборник. – 2013. – Т. 204, № 1. – С. 119–138.
14. *Сергеев И. Н.* Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И. Н. Сергеев // Математические заметки. – 2016. – Т. 99, № 5. – С. 732–751.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГЕРАСИМОВА — КАПУТО ПО ВРЕМЕНИ

Е. Д. Федотов

*Якутское отделение регионального научно-образовательного математического центра
«Дальневосточный центр математических исследований»*

Аннотация. В данной работе получены априорные оценки для задачи Коши для однородной системы уравнений высокого порядка в частных производных с дробной производной Герасимова — Капуто по времени.

Ключевые слова: функция Миттаг — Леффлера, дробная производная, система уравнений в частных производных, производная Герасимова — Капуто, преобразование Фурье, дробное исчисление.

Введение

Как известно, существует большое количество разных определений дробного производного, которые являются обобщением производных целого порядка. В данной работе мы будем использовать определение дробного производного Герасимова — Капуто [1].

В случае $0 < \alpha < 1$ данная производная определяется следующим образом

$$\partial_{0t}^{\alpha} \varphi(t) = I_{0t}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \varphi(t),$$

где I_{0t}^{α} является дробным интегралом Римана — Лиувилля и определяется следующим образом

$$I_{0t}^{\alpha} \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \varphi(\tau) d\tau.$$

В данной работе под $(\partial_{0t}^{\alpha})^k$ стоит понимать как конкатенацию, а именно $(\partial_{0t}^{\alpha})^k = \underbrace{\partial_{0t}^{\alpha} \partial_{0t}^{\alpha} \cdots \partial_{0t}^{\alpha}}_k$.

Так же отметим, что его можно представить как производную Джрбашяна — Нерсесяна [2]

$$(\partial_{0t}^{\alpha})^k = D_{0t}^{\overbrace{\{1, \alpha, \alpha, \dots, \alpha\}}^k}.$$

В работе R. Gorenflo и F. Mainardi [3] было показано реализуемость метода преобразования Лапласа для решения уравнений дробного порядка и важность функции Миттаг — Леффлера в дробном исчислении. Функция Миттаг — Леффлера представляется следующим рядом

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)}.$$

В дальнейшем нас будут интересовать оценки данной функции, в работе А. Ю. Попова и А. М. Селедцкого [4] были получены следующие асимптотические разложения

$$\mathcal{L}_{\alpha} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, |\arg z| \leq \alpha\pi\},$$

$$E_{\alpha}(z) = \begin{cases} \alpha^{-1} \exp(z^{1/\alpha}) + H_m(z) + R_m^{[1]}(z) & z \in \mathcal{L}_{\alpha} \\ H_m(z) + R_m^{[2]}(z) & z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}_{\alpha}, z \neq 0, \end{cases}$$

где

$$H_m(z) = -\sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)},$$

а также остатки $R_m^{[1]}(z)$ и $R_m^{[2]}(z)$ допускают оценки

$$|R_m^{[i]}(z)| \leq C |z|^{-m-1}.$$

Обозначим за $\mathbb{C}_\alpha^+ = \{z \in \mathcal{L}_\alpha \mid |\arg z| < \alpha\pi/2\}$, $\mathbb{C}_\alpha^0 = \{z \in \mathcal{L}_\alpha \mid |\arg z| = \alpha\pi/2\}$ и $\mathbb{C}_\alpha^- = \{z \in \mathcal{L}_\alpha \mid \alpha\pi/2 < |\arg z| \leq \alpha\pi\}$. Также пусть $t \in \mathbb{R}_+$ и $0 < \alpha < 1$

$$E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \begin{cases} \alpha^{-1} \exp(\lambda^{1/\alpha} t) + H_m(\lambda t^\alpha) + R_m^{[1]}(\lambda t^\alpha), & \lambda \in \mathbb{C}_\alpha^+, \operatorname{Re}(\lambda^{1/\alpha}) > 0, \\ \alpha^{-1} \exp(i|\lambda|^{1/\alpha} t) + H_m(\lambda t^\alpha) + R_m^{[1]}(\lambda t^\alpha), & \lambda \in \mathbb{C}_\alpha^0, \operatorname{Re}(\lambda^{1/\alpha}) = 0, \\ \alpha^{-1} \exp(\lambda^{1/\alpha} t) + H_m(\lambda t^\alpha) + R_m^{[1]}(\lambda t^\alpha), & \lambda \in \mathbb{C}_\alpha^-, \operatorname{Re}(\lambda^{1/\alpha}) < 0, \\ H_m(\lambda t^\alpha) + R_m^{[2]}(\lambda t^\alpha), & \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}_\alpha, \lambda \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Откуда мы можем получить соответствующие оценки учитывая, что на нуле она ограничена

$$|E_\alpha(\lambda t^\alpha)| \leq \begin{cases} C |\exp(\lambda^{1/\alpha} t)|, & \lambda \in \mathbb{C}_\alpha^+, \operatorname{Re}(\lambda^{1/\alpha}) > 0, \\ C_1 + \frac{C_2(1+|\lambda|^2)^{-1/2}}{1+C_3 t^\alpha}, & \lambda \in \mathbb{C}_\alpha^0, \operatorname{Re}(\lambda^{1/\alpha}) = 0, \\ C_1 |\exp(\lambda^{1/\alpha} t)| + \frac{C_2(1+|\lambda|^2)^{-1/2}}{1+C_3 t^\alpha}, & \lambda \in \mathbb{C}_\alpha^-, \operatorname{Re}(\lambda^{1/\alpha}) < 0, \\ \frac{C_1(1+|\lambda|^2)^{-1/2}}{1+C_2 t^\alpha}, & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}_\alpha. \end{cases}$$

1. Постановка задачи и основные результаты

1.1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается задача Коши

$$P(\partial_{0t}^\alpha, D_x)u(t, x) = \sum_{k+|\beta|=m} A_{k,\beta} (\partial_{0t}^\alpha)^k D_x^\beta u(t, x) = 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2)$$

$$\left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k u(t, x) \Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & k = 0, \dots, m-2, \\ f(x), & k = m-1, \end{cases}$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — мультииндекс, $A_{k,\beta}$ — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами размера $N \times N$, ∂_{0t}^α — дробная производная Герасимова — Капуто порядка α , $D_x^\beta = \partial^{|\beta|} / \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}$ и $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$. При этом предполагаем, что $\det(A_{m,0}) \neq 0$, откуда поделив на него получим $A_{m,0} = E$.

Решение будем искать в виде

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-ixy} Z(t, y) \hat{f}(y) dy, \quad (3)$$

где $\hat{f}(y)$ образ Фурье преобразования, $f(x)$.

Тогда для матрицы $Z(t, y)$ мы получим следующую задачу Коши

$$\begin{cases} P(\partial_{0t}^\alpha, iy) Z(t, y) = 0, & 0 < \alpha < 1 \\ \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k Z(t, y) \Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & k = 0, \dots, m-2, \\ E, & k = m-1, \end{cases} \end{cases}$$

$$Z(t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (P(i\lambda, iy))^{-1} E_\alpha(i\lambda t^\alpha) d\lambda,$$

где контур Γ содержит в себе все mN корней, характеристического уравнения $\det(P(\lambda, y)) = 0$.

Прямой подстановкой несложно проверить что

$$P(\partial_{0t}^\alpha, iy) Z(t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} P(\partial_{0t}^\alpha, iy) E_\alpha(i\lambda t^\alpha) (P(i\lambda, iy))^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} E_\alpha(i\lambda t^\alpha) d\lambda = 0,$$

$$P(i\lambda, iy) = (i\lambda)^m P(1, y/\lambda) = (i\lambda)^m (E - B), \quad B = - \sum_{\substack{k+\beta=m \\ k \neq m}} A_{k,\beta} y^\beta / \lambda^{|\beta|},$$

$$\left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k Z(t, y) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (i\lambda)^k (P(i\lambda, iy))^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (i\lambda)^{k-m} (E + B + B^2 + \dots) d\lambda.$$

Формула (3) является формальным решением задачи (2). Несложно заметить, что $P(i\lambda, iy) = (i)^m P(\lambda, y)$. Обозначим за $Q(\lambda, y) = \det(P(\lambda, y)) = \prod_{k=1}^{mN} (\lambda - \lambda_k)$, последнее равенство выполняется так как $A_{m,0} = E$. Также в силу однородности $P(\lambda, y)$ мы получим что корни представимы в виде $\lambda_k = \mu_k |y|$, обозначим за $\eta = y/|y|$ тогда $Q(\lambda, y) = |y|^{mN} Q(\mu, \eta)$.

Далее будем предполагать, что $Q(\lambda, y)$ не имеет кратных корней. Тогда мы можем явно вычислить $Z(t, y)$ методом вычетов и получим простое выражение

$$Z(t, y) = \sum_{k=1}^{mN} (i)^{1-m} \frac{C_p^*(\lambda_k, y)}{Q_\lambda(\lambda_k, y)} E_\alpha(i\lambda_k t^\alpha),$$

где $C_p^*(\lambda, y)$ является союзной матрицей (транспонированная матрица алгебраических дополнений) матрицы $P(\lambda, y)$. В силу однородности $P(\lambda, y)$ мы получим

$$C_p^*(\lambda_k, y) = |y|^{m(N-1)} C_p^*(\mu_k, \eta), \\ Q_\lambda(\lambda_k, y) = |y|^{mN-1} Q_\mu(\mu_k, \eta),$$

или же

$$Z(t, y) = (i|y|)^{1-m} \sum_{k=1}^{mN} \frac{C_p^*(\mu_k, \eta)}{Q_\mu(\mu_k, \eta)} E_\alpha(i\lambda_k t^\alpha),$$

а также для его дробных производных по времени

$$\left(\partial_{0t}^\alpha \right)^l Z(t, y) = (i|y|)^{1+l-m} \sum_{k=1}^{mN} \mu_k^l \frac{C_p^*(\mu_k, \eta)}{Q_\mu(\mu_k, \eta)} E_\alpha(i\lambda_k t^\alpha).$$

Так как $Q_\mu(\mu_k, \eta) \neq 0$ и μ_k непрерывно зависит от η , $|\eta| = 1$, то $|Q_\mu(\mu_k, \eta)| \geq b$, также элементы матрицы $C_p^*(\mu_k, \eta)$ будут ограничены некоторой константой. В силу (1) для того, чтобы сходился интеграл (3) предполагая, что $f(x)$ не настолько «хороший» чтобы его образ Фурье преобразования смог противостоять $\exp(C|y|^{1/\alpha} t)$, где $C > 0$, получим что все корни $Q(\lambda, y) = 0$ должны лежать в надлежащей области, а именно $i\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_\alpha^+$.

1.2. Априорные оценки

Из вышесказанного мы можем теперь найти оценки для $(\partial_{0t}^\alpha)^k Z(t, y)$

$$\left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k Z(t, y) \right| \leq C |y|^{1+k-m} \left| \sum_{k=1}^{mN} E_\alpha(i\lambda_k t^\alpha) \right|.$$

Они выглядят как будто у данных оценок есть особенность при $|y| \rightarrow 0$. Уточним эту часть

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k Z(t, y) = \lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (P(i\lambda, iy))^{-1} (i\lambda)^k E_\alpha(i\lambda t^\alpha) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (E(i\lambda)^m)^{-1} (i\lambda)^k E_\alpha(i\lambda t^\alpha) d\lambda = \\ = \frac{i^{1+k-m}}{(m-k)!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{m-k-1} E_\alpha(i\lambda t^\alpha) \Big|_{\lambda=0} = \frac{(t^\alpha)^{m-k-1}}{(m-k)\Gamma(\alpha(m-k-1)+1)}.$$

Как видим при $k \leq m-1$ особенностей не возникает. А при $k \geq m$ уже контурный интеграл будет равен нулю. Тогда мы можем переписать оценку для $k \leq m-1$ следующем виде

$$\left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k Z(t, y) \right| \leq C \left(1 + |y|^2 \right)^{\frac{1+k-m}{2}} \left| \sum_{k=1}^{mN} E_\alpha(i\lambda_k t^\alpha) \right|.$$

Оценки функции Миттаг — Леффлера зависят от сектора, в котором лежат наши λ_k . Если предположить, что $i\lambda_k \in \mathbb{C}_\alpha^0$ для любых $y \in \mathbb{R}_n$, тогда мы получим

$$\left| E_\alpha(i\lambda_k t^\alpha) \right| \leq C_1 + \frac{C_2(1+|y|^2)^{-1/2}}{1+C_3 t^\alpha},$$

следовательно, для $Z(t, y)$ будет верна оценка

$$\left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k Z(t, y) \right| \leq C_1 \left(1 + |y|^2 \right)^{\frac{1+k-m}{2}} + \frac{C_2(1+|y|^2)^{(k-m)/2}}{1+C_3 t^\alpha},$$

где $C_i > 0$. Откуда для $u(t, x)$ используя равенство Парсеваля получим

$$\max_{k+|\beta| \leq m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k D_x^\beta u(t, x) \right|^2 dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}_n} |f(x)|^2 dx + \frac{C_2}{(1+C_3 t^\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}_n} \left(1 + |y|^2 \right)^{-1} \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy.$$

Аналогично мы можем найти и для остальных случаев. При $i\lambda_k \in \mathbb{C}_\alpha^-$ для любых $y \in \mathbb{R}_n$,

$$\max_{k+|\beta| \leq m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k D_x^\beta u(t, x) \right|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}_n} \exp\left(-C_1 |y|^{1/\alpha} t\right) \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy + \frac{C_2}{(1+C_3 t^\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}_n} \left(1 + |y|^2 \right)^{-1} \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy,$$

и для $i\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}_\alpha$ мы получим

$$\max_{k+|\beta| \leq m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k D_x^\beta u(t, x) \right|^2 dx \leq \frac{C_1}{(1+C_2 t^\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}_n} \left(1 + |y|^2 \right)^{-1} \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy.$$

1.3. Обсуждение результатов

Случай при $i\lambda_k \in \mathbb{C}_\alpha^0$ для любых $y \in \mathbb{R}_n$, можно с некоторой уверенностью сказать, что система является гиперболической. Так как все наши оценки являются оценками по сечению времени, мы можем оценить его дробные производные при $t = \tau_1 > 0$ и получим, что

$$\left. \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k u(t, x) \right|_{t=\tau_1} = f_k^{[1]}(x),$$

$$\left| \hat{f}_k^{[1]}(y) \right| \sim \left(1 + |y|^2 \right)^{(1+k-m)/2} \left| \hat{f}(y) \right|.$$

И решая соответствующую задачу Коши, начиная уже с этого момента. Для удобства сдвинув время на τ_1 получим следующую задачу Коши

$$P\left(\partial_{0t}^\alpha, D_x\right) u^{[1]}(t, x) = \sum_{k+|\beta|=m} A_{k,\beta} \left(\partial_{0t}^\alpha\right)^k D_x^\beta u^{[1]}(t, x) = 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\left. \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k u^{[1]}(t, x) \right|_{t=0} = f_k^{[1]}(x), \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (4)$$

Ну и чтобы получить оценки поступим следующим образом. В силу однородности нашего уравнения мы решим для каждого отдельного $f_k^{[1]}(x)$, т. е. все начальные данные равны нулю кроме одного некоторого $k = r$. Получение оценок не будет отличаться от того, как мы его получали до этого, с той лишь разницей что

$$Z_r(t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (i\lambda)^{m-1-r} \left(P(i\lambda, iy) \right)^{-1} E_\alpha(i\lambda t^\alpha) d\lambda.$$

Откуда получим следующие оценки

$$\max_{k+|\beta|\leq m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k D_x^\beta u^{[1]}(t, x) \right|^2 dx \leq C_1 \sum_{r=1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left(1 + |y|^2 \right)^{m-1-r} \left| \hat{f}_r^{[1]}(y) \right|^2 dy \leq C_2 \int_{\mathbb{R}_n} \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy.$$

Тогда $u(t, x)$ с течением времени, в сечении по времени не становится «хуже» по x .

Дела начинают становиться страннее, в случае если $i\lambda_k \in \mathbb{C}_\alpha^-$ для любых $y \in \mathbb{R}_n$. Ведь в оценках функции Миттаг — Леффлера при таких λ_k , главным членом является его степенная часть, и убывающей экспонентой можно пренебречь. Поступим так же, как и в прошлый раз, получим задачу (4) а также

$$\left| \hat{f}_k^{[1]}(y) \right|^2 \sim \left(C_1 \exp\left(-2C_2 |y|^{1/\alpha} \tau_1\right) \left(1 + |y|^2\right)^{1+k-m} + C_2 \left(1 + |y|^2\right)^{k-m} \right) \left| \hat{f}(y) \right|^2.$$

И соответственно оценки получим следующие

$$\begin{aligned} \max_{k+|\beta|\leq m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k D_x^\beta u^{[1]}(t, x) \right|^2 dx &\leq \sum_{r=1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left(C_1 \exp\left(-2C_2 |y|^{1/\alpha} \tau_1\right) \left(1 + |y|^2\right)^{m-1-r} + \right. \\ &+ C_3 \left(1 + |y|^2\right)^{m-r-2} \left. \right) \left| \hat{f}_r^{[1]}(y) \right|^2 dy \leq \int_{\mathbb{R}_n} \left(C_4 \exp\left(-2C_2 |y|^{1/\alpha} (\tau_1 + t)\right) + \right. \\ &+ C_5 \left(1 + |y|^2\right)^{-1/2} \exp\left(-2C_2 |y|^{1/\alpha} t\right) + C_6 \left(1 + |y|^2\right)^{-1/2} \left. \right) \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy. \end{aligned}$$

Продолжив также, по индукции получим для $u^{[n]}(t, x)$

$$\begin{aligned} \max_{k+|\beta|\leq m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k D_x^\beta u^{[n]}(t, x) \right|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}_n} \left(\exp\left(-2C_1 |y|^{1/\alpha} t\right) + C_2 \left(1 + |y|^2\right)^{-1/2} \right) \times \\ &\times \left(C_3 \exp\left(-2C_1 |y|^{1/\alpha} \sum_{i=1}^n \tau_i\right) + C_4 \left(1 + |y|^2\right)^{-1/2} \right)^n \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\tau_i > 0$ мы можем переписать его в виде

$$\max_{k+|\beta|\leq m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k D_x^\beta u^{[n]}(t, x) \right|^2 dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}_n} \left(\exp\left(-2C_1 |y|^{1/\alpha} t\right) + C_2 \left(1 + |y|^2\right)^{-1/2} \right) \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy.$$

Откуда в конечном итоге получим, что

$$\max_{k+|\beta|\leq m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k D_x^\beta u(t, x) \right|^2 dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}_n} \left(\exp\left(-2C_2 |y|^{1/\alpha} t\right) + C_3 \left(1 + |y|^2\right)^{-1/2} \right) \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy.$$

Тогда получили, что уравнение (2) в данном случае будет похоже на что-то параболическое. Отметим, что тут благодаря произвольности τ_i , экспоненту удержали около единицы, тем самым получили, «адекватную» оценку.

Не «адекватной» оценка у нас будет в последнем рассмотренном нами случае, а именно при $i\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}_\alpha$ для всех $y \in \mathbb{R}_n$. Стоит отметить что при $\alpha \rightarrow 1$ данная область исчезнет. Снова поставим задачу (4), где

$$\left| \hat{f}_k^{[1]}(y) \right| \sim \left(1 + |y|^2 \right)^{(k-m)/2} \left| \hat{f}(y) \right|.$$

Откуда сразу получим

$$\max_{k+|\beta|\leq m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k D_x^\beta u^{[1]}(t, x) \right|^2 dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}_n} \left(1 + |y|^2 \right)^{-2} \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy,$$

что уже не есть хорошо, ведь тогда оценка для $u^{[n]}(t, x)$ будет иметь вид

$$\max_{k+|\beta|\leq m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left| \left(\partial_{0t}^\alpha \right)^k D_x^\beta u^{[n]}(t, x) \right|^2 dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}_n} \left(1 + |y|^2 \right)^{-n-1} \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy.$$

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSRG-2023-0025.

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. – М. : Физматлит, 2003. – 272 с.
2. Джрбабян М. М., Нерсисян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнение дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Матем. – 1968. – № 3. – С. 3–28.
3. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order // A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. – 1997. – P. 223–276.
4. Попов А. Ю., Седлецкий А. М. Распределение корней функций Миттаг — Леффлера // СМФН. – 2011. – № 40. – С. 3–171.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ КЛАССОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНЫХ ИНВАРИАНТОВ

З. Н. Хакимова

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского

Аннотация. Рассматриваются мультипликативные классы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с произвольными функциями, в частности, степенного вида. Обсуждается метод интегрирования уравнений с помощью инвариантов дискретных преобразований. Этот метод проиллюстрирован для нескольких различных классов уравнений. В результате, приведены общие решения мультипликативного двухпараметрического класса уравнений с двухфункциональным произволом, а также его различных спецификаций; в частности, приведено общее решение трехпараметрического класса уравнений степенного вида.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка, дискретное преобразование, инвариант дискретного преобразования, конкомитант, общее решение ОДУ.

Введение

Разработанный В. Ф. Зайцевым дискретно-групповой анализ (ДГА) ОДУ [1], включает в себя интегрирование уравнений с помощью дискретных симметрий для исследуемых классов уравнений.

Для нахождения точных решений уравнений в рамках ДГА используется два основных метода: метод «размножения» разрешимых случаев по найденной дискретной группе для рассмотренного класса уравнений, а также метод дискретных инвариантов, который в данной статье применяется к ОДУ 2-го порядка с мультипликативными правыми частями.

1. Интегрирование степенного $\mathbf{r}$ -инвариантного класса уравнений

Рассмотрим четырёхпараметрический класс ОДУ 2-го порядка со степенной правой частью:

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m (xy'_x - y)^n, \quad (1)$$

который при $n = 0$ содержит класс обобщённых уравнений Эмдена — Фаулера

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m, \quad (2)$$

имеющий много приложений, в первую очередь, в теоретической физике. Будем обозначать класс уравнений (1) вектором параметров $(k, l, m, n | A)$.

Известно несколько дискретных преобразований (являющихся образующими дискретных циклических групп), которые замкнуты в классе уравнений (1) [2–4], в том числе, точечное преобразование

$$\mathbf{r}: x \rightarrow y, \quad y \rightarrow x, \quad (k, l, m, n | A) \rightarrow (l, k, 3 - m - n, n | (-1)^{n-1} A), \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{E}. \quad (3)$$

Найдём точный $\mathbf{r}$ -инвариант (с точностью до коэффициента A) в классе уравнений (1). Для этого в (3) приравняем соответствующие параметры — показатели степеней:

$$k = l, \quad m = 3 - m - n.$$

В результате получается $\mathbf{r}$ -инвариант — двухпараметрический подкласс класса уравнений (1):

$$y''_{xx} = Ax^k y^k (y'_x)^{\frac{3-n}{2}} (xy'_x - y)^n \text{ или } \left(k, k, \frac{3-n}{2}, n \mid A \right). \quad (4)$$

Класс уравнений (4) можно записать в виде

$$y''_{xx} = A(xy)^k \left(\frac{xy'_x - y}{(y'_x)^{\frac{1}{2}}} \right)^n (y'_x)^{\frac{3}{2}} \quad (5)$$

или

$$a \frac{y''_{xx}}{(y'_x)^{\frac{3}{2}}} = aA(xy)^k \left(\frac{xy'_x - y}{(y'_x)^{\frac{1}{2}}} \right)^n.$$

Положим

$$\theta = xy, \quad \dot{V}_\theta = a \frac{y''_{xx}}{(y'_x)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда

$$V'_x = \theta'_x \dot{V}_\theta = \frac{a(xy'_x + y)y''_{xx}}{(y'_x)^{\frac{3}{2}}}. \quad (6)$$

Интегрируя (6), получаем

$$V = 2a \frac{xy'_x - y}{(y'_x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Положим $2a = 1$, тогда

$$\theta = xy, \quad V = \frac{xy'_x - y}{(y'_x)^{\frac{1}{2}}}. \quad (7)$$

Легко видеть, что функция θ является точным $\mathbf{r}$ -инвариантом, а V — $\mathbf{r}$ -инвариантом с точностью до знака.

Совокупность функций θ и V в (7) является конкомитантом — согласованным инвариантом дискретного преобразования $\mathbf{r}$.

Замечание 1. Особенно эффективным является процесс нахождения функции V при $n = 0$, т. е. для подкласса (2) — когда нет подсказки, как в (5).

С помощью конкомитанта (7) понижается порядок уравнения (5) — оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\dot{V}_\theta = \frac{A}{2} \theta^k V^n, \quad (8)$$

имеющее общее решение при $k \neq -1$

$$V(\theta) = \left[\frac{(1-n)A}{2(k+1)} \theta^{k+1} + C_2 \right]^{\frac{1}{1-n}}. \quad (9)$$

Рассматривая конкомитант (7) как систему уравнений относительно x и y , можно найти преобразование, обратное к конкомитанту (7):

$$x = C_1 e^{2 \int \frac{d\theta}{V^2 + 4\theta \pm V \sqrt{V^2 + 4\theta}}}, \quad y = \frac{1}{C_1} \theta e^{-2 \int \frac{d\theta}{V^2 + 4\theta \pm V \sqrt{V^2 + 4\theta}}}. \quad (10)$$

Если подставить (9) в (10), то получим общее решение $\mathbf{r}$ -инварианта (5).

2. Интегрирование g -инвариантного уравнения с произвольными функциями

Можно обобщить приведенный в пункте 1 результат на случай произвольных функций, т. е. для уравнения

$$y''_{xx} = Af(xy)g\left(\frac{xy'_x - y}{(y'_x)^{\frac{1}{2}}}\right)(y'_x)^{\frac{3}{2}}, \quad (11)$$

частным случаем которого является (5) при $f(\alpha) = \alpha^k$, $g(\beta) = \beta^n$.

С помощью того же конкомитанта (7) уравнение (11) приводится к легко разрешимому уравнению 1-го порядка:

$$\dot{V}_\theta = \frac{A}{2}f(\theta)g(V), \quad (12)$$

общее решение которого:

$$V = G^{-1}(F(\theta)), \quad F(\theta) = \frac{A}{2} \int f(\theta) d\theta + C_2, \quad G(\zeta) = \int \frac{d\zeta}{g(\zeta)} \quad (13)$$

(в (13) показатель «-1» означает обратную функцию).

Подстановка (13) в обращение (10) конкомитанта (7) даёт общее решение уравнения (11).

3. Интегрирование мультипликативных классов уравнений-обобщений (5) и (11)

Пусть

$$\theta = x^k y^l, \quad V = (xy'_x - y)(y'_x)^\lambda. \quad (14)$$

В результате вычислений получаем следующее: для того, чтобы $\dot{V}_\theta$ имело степенной вид, необходимо положить $\lambda = -\frac{k}{k+l}$, тогда

$$\dot{V}_\theta = \frac{y''_{xx}}{(k+l)x^{k-1}y^{k-1}(y'_x)^{\frac{2k+l}{k+l}}}.$$

Получается обобщение результата, изложенного в пункте 2: класс уравнений

$$xyy''_{xx} = Af(x^k y^l)g\left(\frac{xy'_x - y}{(y'_x)^{\frac{k}{k+l}}}\right)(y'_x)^{\frac{2k+l}{k+l}} \quad (15)$$

с помощью преобразования

$$\theta = x^k y^l, \quad V = \frac{xy'_x - y}{(y'_x)^{\frac{k}{k+l}}} \quad (16)$$

приводится к уравнению 1-го порядка

$$\dot{V}_\theta = \frac{A}{k+l} \frac{f(\theta)}{\theta} g(V), \quad (17)$$

общее решение которого

$$V(\theta) = G^{-1}(F(\theta)), \quad F(\theta) = \frac{A}{k+l} \int \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta + C_2, \quad G(\zeta) = \int \frac{d\zeta}{g(\zeta)}. \quad (18)$$

Для нахождения общего решения класса уравнений (15) необходимо найти преобразование, обратное к (16); оно имеет следующий вид:

$$x = C_1 \theta^{\frac{l-1}{l}} e^{\frac{k}{l} \int \frac{d\theta}{\theta(Vz^k + k + l)}}, \quad y = \frac{1}{C_1} \theta^{\frac{1}{l}} e^{-\frac{k}{l} \int \frac{d\theta}{\theta(Vz^k + k + l)}}, \quad (19)$$

где функция $z(\theta, V(\theta))$ удовлетворяет алгебраическому уравнению $(k+l)$ -го порядка:

$$\theta^{\frac{1}{k}} z^{k+l} - Vz^k - 1 = 0. \quad (20)$$

Подставив (18) в (19), (20), получаем общее решение двухпараметрического уравнения (15) с двухфункциональным произволом.

Если в (15) положить $f(\alpha) = \alpha$, $g(\beta) = \beta^n$, $k \rightarrow k+1$, $l \rightarrow l+1$, то получим степенной трехпараметрический класс уравнений

$$y''_{xx} = Ax^k y' (y'_x)^{\frac{k(2-n)+l-n+3}{k+l+2}} (xy'_x - y)^n, \quad (21)$$

который при подстановке преобразования

$$\theta = x^{k+1} y^{l+1}, \quad V = \frac{xy'_x - y}{(y'_x)^{\frac{k+1}{k+l+2}}} \quad (22)$$

приводится к уравнению

$$\dot{V}_\theta = \frac{A}{k+l+2} V^n,$$

общее решение которого

$$V = \left[\frac{A(1-n)}{k+l+2} \theta + C_2 \right]^{\frac{1}{1-n}}. \quad (23)$$

Подстановка (23) в (19), т. е. в обращение преобразования (22) (при $k \rightarrow k+1$, $l \rightarrow l+1$) даёт общее решение степенного трёхпараметрического класса уравнений (21).

Замечание 2. Интегрируемость степенного класса уравнений (21) была обнаружена ещё прежде [5], но не было выписано общее решение.

Заключение

1. С помощью дискретных инвариантов был понижен порядок нескольких мультипликативных классов уравнений с константным и функциональным произволом.
2. Удалось найти обращение всех найденных конкомитантов и их обобщений. Благодаря этому, удалось выписать общие решения всех исследуемых мультипликативных классов уравнений.
3. В дальнейшем можно попытаться выписать общие решения инвариантов других, отличных от $\mathbf{r}$, преобразований, а также их обобщений. Кроме того, можно далее использовать метод «размножения» — «размножить» найденные разрешимые случаи с помощью дискретных групп преобразований.

Литература

1. Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М. : Наука, 1993. – 464 с.
2. Хакимова З. Н. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Актуальные вопросы современной науки, № 3 / З. Н. Хакимова, О. В. Зайцев. – СПб., 2014. – С. 3–11.
3. Хакимова З. Н. Выбор класса дифференциальных уравнений для нахождения новых разрешимых случаев // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математиче-

ского образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2017» / З. Н. Хакимова. – СПб. : РГПУ, 2017. – С. 112–117.

4. Хакимова З. Н. Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и процессы управления / З. Н. Хакимова, О. В. Зайцев. – 2021. – № 1(4). – С. 61–92. – URL: <https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.1/article.1.4.html>

5. Хакимова З. Н. Интегрирование дискретных инвариантов в классе полиномиальных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Труды Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского / З. Н. Хакимова. – 2014 – С. 8–16.

О ЯВНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

В. Ю. Чурсин

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка на отрезке с постоянным матричным коэффициентом с нелокальным краевым условием, содержащим как неизвестную функцию, так и ее производную. Получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения. Найдено явное представление для функции Грина.

Ключевые слова: краевая задача, функция Грина, функциональное исчисление, жорданова форма матрицы, матричная экспонента, дифференциальное уравнение с матричным коэффициентом.

Введение

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$x'(t) - Ax(t) = h(t), \quad t \in [a, b],$$

с краевым условием

$$f(x) = \int_a^b (\lambda x(t) - x'(t))g(t)dt.$$

Для этой краевой задачи выписываются необходимые и достаточные условия существования и единственности решения при любом свободном члене h , а также выписывается явный вид функции Грина.

Формулировка основного результата

Обозначим через $C = C([a, b], C^n)$ линейное пространство всех непрерывных векторных функций $h: [a, b] \rightarrow C^n$, а через $C^1 = C^1([a, b], C^n)$ — линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций x , для которых $x, x' \in C$. Эти пространства являются банаховыми относительно норм

$$\begin{aligned} \|h\| &= \max_{t \in [a, b]} \|h(t)\|, \\ \|x\| &= \max \left\{ \max_{t \in [a, b]} \|x(t)\|, \max_{t \in [a, b]} \|x'(t)\| \right\}, \end{aligned}$$

где в C^n используется произвольная норма. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x'(t) - Ax(t) = h(t), \quad t \in [a, b],$$

с краевым условием

$$f(x) = 0,$$

где

$$f(x) = \int_a^b (\lambda x(t) - x'(t))g(t)dt.$$

Здесь A — комплексная матрица размера $n \times n$, $h: [a, b] \rightarrow C^n$ — непрерывная функция, $g: [a, b] \rightarrow C$ — непрерывная функция, $\lambda \in C$ — константа. Доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\lambda \notin \sigma(A)$, а матрица $\int_a^b e^{A\tau} g(\tau) d\tau$ обратима. Тогда рассматриваемая краевая задача имеет единственное решение $x \in C^1$ при любом свободном члене $h \in C$ и это решение задается формулой

$$x(t) = \int_a^b G(t, s)h(s)ds,$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} \left(\int_a^b e^{A\tau} g(\tau) d\tau \right)^{-1} e^{At} \left((\lambda I - A)^{-1} g(s) + e^{-As} \int_a^s e^{A\tau} g(\tau) d\tau \right), & a \leq s < t, \\ \left(\int_a^b e^{A\tau} g(\tau) d\tau \right)^{-1} e^{At} \left((\lambda I - A)^{-1} g(s) - e^{-As} \int_s^b e^{A\tau} g(\tau) d\tau \right), & t < s \leq b. \end{cases}$$

Из условий теоремы следует, что поскольку существует резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$, а матрица $\int_a^b e^{A\tau} g(\tau) d\tau$ обратима, то функция G определена корректно. Назовем ее функцией Грина рассматриваемой краевой задачи.

Идея доказательства. Сначала находится формула для решения скалярной краевой задачи

$$\begin{aligned} x'(t) - \mu x(t) &= h(t), & t \in [a, b], \\ f(x) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$f(x) = \int_a^b (\lambda x(t) - x'(t)) g(t) dt.$$

Это делается путем прямых вычислений. Ответ получается следующий:

$$x(t) = \int_a^b G(t,s) h(s) ds,$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{e^{\mu t} g(s)}{(\lambda - \mu) \int_a^b e^{\mu \tau} g(\tau) d\tau} + \frac{\int_a^s e^{\mu(\tau-s+t)} g(\tau) d\tau}{\int_a^b e^{\mu \tau} g(\tau) d\tau}, & a \leq s < t, \\ \frac{e^{\mu t} g(s)}{(\lambda - \mu) \int_a^b e^{\mu \tau} g(\tau) d\tau} - \frac{\int_s^b e^{\mu(\tau-s+t)} g(\tau) d\tau}{\int_a^b e^{\mu \tau} g(\tau) d\tau}, & t < s \leq b. \end{cases}$$

После этого в полученную формулу для G вместо μ подставляется матрица A и выполняется проверка, для чего доказываются следующие леммы.

Лемма 2. Функция G удовлетворяет рассматриваемому дифференциальному уравнению.

Лемма 3. Функция G удовлетворяет рассматриваемому краевому условию.

В ходе доказательства полезным также оказалось следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть $\lambda \notin \sigma(A)$, $g : [a, b] \cup [c, d] \rightarrow C$ — непрерывная функция, а матрица $\int_a^b e^{A\tau} g(\tau) d\tau$ обратима. Тогда следующие матрицы коммутируют: A , $(\lambda I - A)^{-1}$, e^{At} , $\int_c^d e^{As} g(s) ds$, $\left(\int_a^b e^{A\tau} g(\tau) d\tau \right)^{-1}$.

Его доказательство базируется на свойствах матричной экспоненты [1].

Условия обратимости матрицы $\int_a^b e^{A\tau} g(\tau) d\tau$ приводятся в следующей лемме.

Лемма 5. Для того чтобы матрица $\int_a^b e^{A\tau} g(\tau) d\tau$ была обратима, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\lambda \in \sigma(A)$ выполнялось $\int_a^b e^{\lambda t} g(t) dt \neq 0$.

Доказательство опирается на преобразование к жордановой форме матрицы [2], свойства матричной экспоненты [3] и явное представление экспоненты от жорданова блока [4].

Литература

1. Боровских А. В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. В. Боровских, А. И. Перов. – Москва – Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2004. – 540 с.
2. Курбатов В. Г. Алгебра : учебное пособие / В. Г. Курбатов. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. – 604 с.

3. Курбатов В. Г. Вычислительные методы спектральной теории : учебное пособие / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. – 323 с.

4. Шилев Г. Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства) / Г. Е. Шилев. Москва : Наука, 1969. – 432 с.